

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

53. Band, Heft 6

24. März 1961

S. 337–519

Allgemeines. Didaktik. Bibliographisches.

● **Bianchi, Luigi:** *Opere.* A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. I, parte I; Vol. I, parte II; Vol. II. Rom: Edizioni Cremonese Della Casa Editrice Perrella 1953. 616 p.; 276 p.; 335 p. L. 5000; L. 2500; L. 3000.

I, I. Die mit dem vorliegenden Band beginnende Gesamtausgabe ist nach einem noch von dem 1942 verstorbenen Bortolotti vorbereiteten Plan, nach Sachgebieten geordnet, auf zehn Bände berechnet, deren erster die Arbeiten zur Zahlentheorie, Algebra und Analysis enthält, während die übrigen ausschließlich geometrische Arbeiten bringen. Die Ausgabe liegt in den Händen eines größeren Mitarbeiterstabes, meist italienischer Fachgenossen, doch ist auch Frankreich (Gambier) und Deutschland (Blaschke) vertreten. Sie ist hervorragend mit bibliographischen Nachweisen und wissenschaftlichen Einführungen versehen, die sich teilweise sogar überschneiden, so daß der gleiche Gegenstand von verschiedenen Seiten beleuchtet wird. Band I enthält ein vollständiges Schriftenverzeichnis von 209 Titeln (1878–1930); darin sind auch (zum Schaden der Übersicht) die Bücher und lithographierten Vorlesungen mitenthaltend, unter denen die auch in deutscher Übersetzung erschienene „Differentialgeometrie“ sowie die „Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni“ am weitesten Verbreitung gefunden haben dürften, ebenso die von Bianchi verfaßten wissenschaftlichen Nachrufe. Es folgt ein Verzeichnis von Nachrufen auf Bianchi und Würdigungen seines Werkes, sodann ein Nachruf aus der Feder von Scorza, der neben den lebensgeschichtlichen Daten (geb. 1856 Parma, wichtigster Lehrer Betti und Dini in Pisa, Studium auch in München und Göttingen, Berührung mit Klein, 1881 Professor in Pisa, Scuola normale, 1886 Universität, gest. 1929) auch ein lebendiges Bild der Persönlichkeit und ihrer Wirksamkeit in Wort und Schrift bietet. Es schließt sich an eine ausführliche Gesamtbesprechung der analytischen und geometrischen Abhandlungen durch Fubini, der algebraischen und zahlentheoretischen durch Bedarida und Ricci, welche letztere den weiteren Inhalt des Bandes bilden. Besonders breiten Raum nehmen die Arbeiten zur Theorie der Modulgruppen mit Koeffizienten aus einem imaginär-quadratischen Zahlkörper ein (Verallgemeinerung der Picardschen Gruppe, Konstruktion von Fundamentalbereichen nebst Anwendung auf die Reduktion von quadratischen und Hermiteischen Formen), die an den Kleinschen Ideenkreis anknüpfen; aber auch zahlreiche Beiträge zu anderen Gebieten liegen vor, so zur Gleichungstheorie und aus den letzten Jahren zur Idealtheorie der Zahlkörper (Nachweis der Existenz von unendlich vielen Primidealen ersten Grades, primitive Wurzeln in Restklassen nach zusammengesetzten Idealmoduln), die auch heute noch beachtenswert erscheinen. — I, II. Dieser Band enthält mit kürzeren Einführungen die Abhandlungen zur Analysis, von denen etwa die erste, noch auf Kleinsche Anregungen zurückgehende, über Normalformen von elliptischen Integralen im Zusammenhang mit Kurven dritter und fünfter Ordnung (Tetraeder- bzw. Ikosaederirrationalität) hervorgehoben sein mag, ferner Arbeiten zur Theorie der kontinuierlichen Gruppen und der partiellen Differentialgleichungen, insbesondere über die Ausdehnung des Riemannschen Verfahrens für hyperbolische Gleichungen auf Gleichungen n -ter Ordnung. Außerdem enthält der Band wissenschaftliche Nachrufe auf Lie, Weingarten, Dini, Jordan und Klein. — II. Dieser Band enthält 16 Arbeiten zur Theorie der Flächenbiegung, mit einer inhaltreichen Einführung von R. Calapso, der die Entwicklungslinien rückwärts und vorwärts bis in die Gegenwart hinein verfolgt und so die Fruchtbarkeit und das Weiterwirken der Bianchischen Ideen vor Augen führt. Besonders tritt hervor eine Note aus dem Jahre 1881 über infinitesimale Biegungen, worin an mehr formelmäßige Untersuchungen von Weingarten angeknüpft wird und durch Herausarbeitung der geometrischen Bedeutung die Grundlagen zu zahlreichen späteren Forschungen gelegt werden (assoziierte Flächen, die sich durch parallele Normalen entsprechen und bei denen dem Netz der Asymptotenlinien ein konjugiertes System entspricht). Zum Schluß des Bandes findet man die beiden umfangreichen Arbeiten über Biegung von Flächen konstanter Krümmung (in Euklidischen und nicht-Euklidischen Räumen) bei konstanten Winkeln der Bahnkurven mit jeder einzelnen Fläche (isogonale Deformationen), wobei es insbesondere gelingt, aus einem bekannten System durch Lösung einer gewöhnlichen Riccatischen Gleichung, Differentiationen, Quadraturen und algebraische Prozesse eine beliebig vielparametrische Schar solcher herzuleiten.

Hermann Schmidt (Würzburg).

Saltykov, N.: *Das Problem der Reform des mathematischen Unterrichts in der höheren Schule.* Enseignement math. phys., Beograd 2, 1–10 (1953) [Serbo-kroatisch].

Geschichte.

● **Laue, Max von:** *Histoire de la physique*. Traduction française de Ch. et André Coury. Préface de Paul Padovani. Paris: Lamarre 1953.

● **Renou, Louis et Jean Filliozat:** *L'Inde classique. Manuel des études indiennes*. Tome II, avec le concours de Paul Demieville, Olivier Lacombe et Pierre Merle. (Bibliothèque de l'École française d'Extrême-Orient. Vol. 3.) Paris: Imprimerie Nationale; Hanoi: École française d'Extrême-Orient 1953.

Die Artikel über Mathematik und Astronomie sind von O. Neugebauer vom Standpunkt der modernen Forschung in Arch. internat. Hist. Sci. 8, 166—173 (1955) besprochen worden.

Winter, H. J. J.: *Formative influences in islāmic science*. Arch. internat. Hist. Sci. 6, 171—192 (1953).

An ausgewählten Beispielen wird das Fortleben antiker Naturwissenschaften und ihre Weiterführung und Verwandlung im Islam gezeigt. Weit überragend war der griechische Einfluß; vor allem die geometrische Methode und die streng logische Deduktion wurden den islamischen Gelehrten zur zweiten Natur. Deren Interesse war jedoch mehr als bei den Griechen auf praktische Anwendungen gerichtet, in denen sie ihre größten Fortschritte erzielten (Optik, Algebra, Chemie, Medizin). — Von den Errungenschaften der indischen und chinesischen Wissenschaft mit ihrem mehr formalistischen und kombinatorischen Denken wurde nur das übernommen, was zwanglos in das griechische System paßte oder unmittelbar verwertbar war (Ziffersystem, Trigonometrie), nicht dagegen z. B. der Begriff der negativen Zahl und die Lehre von den unbestimmten Gleichungen. Über Indien und die fast gänzlich unbekannte persische Literatur flossen vermutlich auch die Kanäle, die babylonisches Wissen dem Islam vermittelten (Algebra, Astronomie). — Der Aufsatz enthält viele Hinweise auf weiterführende Literatur. *H. Hermelink.*

Hofmann, Joseph E.: *Im Gedenken an François Viète*. Pyramide 11/12, 201—204 (1953).

Dieser Artikel gibt den wesentlichen Inhalt einer Gastvorlesung wieder, die Verf. im Dezember 1953 an der Universität Gießen zum Gedächtnis der 350. Wiederkehr des Todestages von François Viète (1540—1603) gehalten hat. Er ist ein auf genauer Kenntnis der Quellen beruhender, liebevoll gezeichneter Rückblick auf das Leben und das Werk dieses genialen „Amateurs“ der Mathematik, der, von Hause aus Rechtsanwalt, anknüpfend an die Ergebnisse und Methoden der antiken Mathematiker und an die beste mathematische Fachliteratur seiner Zeit, das Überkommene mit neuem Leben erfüllte und den mathematischen Wissenschaften große Impulse und eine neue Richtung gegeben hat. Verf. zeigt, wie Viète in die Wirrnisse und Bürgerkriege verstrickt war, die sein von Glaubenskämpfen zerrissenes Vaterland erschütterten und wie er als Rechtsberater der Hugenotten in die politischen Geschehnisse Frankreichs eingegriffen hat. Vor allem aber versteht es der Verf., die wichtigsten Ergebnisse seines wissenschaftlichen Wirkens, wie z. B. die numerische Auflösung algebraischer Gleichungen, die Einführung des Buchstabenrechnens, die Verknüpfung arithmetischer und geometrischer Methoden, die Beiträge zur Infinitesimalmathematik, in ihrer zeitgebundenen Form und in ihrer grundsätzlichen und richtungsweisenden Bedeutung für die Ausbildung der Ideen und Methoden späterer Generationen von Mathematikern, eines Descartes, Gregory, Huygens, Fermat, Newton, Euler, darzustellen und klar zu machen. „Viète ... hat uns die Pforte zur modernen Betrachtungsweise aufgeschlossen, und seine geistigen Erben haben uns die Türe geöffnet“. Ein umfangreiches Verzeichnis von Schriften, auf die Viète aufbaut, die er verfaßt, mit denen er sich auseinandergesetzt, denen er den Weg bereitet hat und die über ihn berichten, ist beigelegt. *E. Löffler.*

Agostini, Amedeo: *Quattro lettere inedite di Leibniz e una lettera di G. Grandi*. Arch. internat. Hist. Sci. 6, 434—443 (1953).

Daß die Briefe bisher unediert seien, ist unrichtig; sie sind nach den Originalen in Florenz abgedruckt bei A. v. Reumont, Magliabecchi, Muratori und Leibnitz, Allgemeine Monatsschrift für Wissenschaft und Literatur Juli 1854, S. 222—230. In C. I. Gerhardt: Leibnizens mathematische Schriften IV, 1859, S. 209—226 finden sich außerdem Abdrucke nach den (weniger vollständigen) Konzepten in Hannover.

J. E. Hofmann.

Martić, Ljubo: Dreihundert Jahre Wahrscheinlichkeitsrechnung 1654—1954. Enseignement math. phys., Beograd 2, 198—203 (1953) [Serbo-kroatisch].

Gussov, V. V.: Die Entwicklung der Theorie der Zylinderfunktionen in Rußland und in der UdSSR. Istoriko-mat. Issledovanija 6, 355—475 (1953) [Russisch].

Die vorliegende Schrift behandelt die Geschichte der Zylinderfunktionen in Rußland und in der UdSSR in ihrem Zusammenhang mit der Geschichte dieser Funktionen in anderen Ländern. Verf. verfolgt das Ziel, einen bedeutenden Einfluß der Ergebnisse der Mathematiker seines Landes auf die Entwicklung der Theorie der Zylinderfunktionen in der ganzen Welt darzutun. Er unterscheidet dabei drei Entwicklungsperioden: die Periode der Einführung dieser Funktionen, in welcher auch die ersten Untersuchungen ihrer Eigenschaften stattfanden (1738—1824). Hierher gehören die Arbeiten von D. Bernoulli, Euler, Lagrange, Fourier und Poisson. In dieser Periode entstanden die Zylinderfunktionen als Lösungen konkreter Aufgaben und waren selbst noch nicht Gegenstand eigener mathematischer Untersuchungen, sie wurden unabhängig voneinander betrachtet. Die zweite Periode datiert Verf. mit 1824—1880, ausgehend von der Besselschen Abhandlung. Im Verlauf dieser Periode wurde die Theorie der Zylinderfunktionen 1. und 2. Art z. T. systematisch bearbeitet, spezielle Bezeichnungen hierfür eingeführt und gewisse Verallgemeinerungen gemacht. Es wurde eine enge Beziehung zur Theorie der analytischen Funktionen festgestellt und die Zylinderfunktionen nicht mehr einzeln, sondern als ganze Systeme ähnlicher Art untersucht. Als Ursache einer dritten, bis jetzt andauernden Periode wird eine Arbeit von N. Ja. Sonin (1880) genannt, in welcher, wie Verf. ausführt, eine allgemeine Theorie der Zylinder- und der Halbzylinderfunktionen geschaffen wurde. Schließlich stellt Verf. die in seinem Lande erzielten Ergebnisse aus der Theorie der Zylinderfunktionen, jene drei Perioden verfolgend, zusammen.

N. Stuloff.

Depman, I. Ja.: Die bedeutenden slavischen Rechner G. Vega und Ja. F. Kulik. Istoriko-mat. Issledovanija 6, 573—608 (1953) [Russisch].

Der Artikel besteht aus zwei selbständigen Teilen. Der erste Teil enthält eine kurze biographische Auskunft über Georg Vega (1754—1802) und eine Übersicht seiner Werke, von denen das wichtigste die auch heutzutage gebrauchte siebenstellige Logarithmentafel ist. Ein Verzeichnis der Literatur über G. Vega ist angeführt, und es werden Angaben über die Ausgaben seiner Tafeln gemacht. — Der zweite Teil stellt einen kurzen Abriß des Lebens und des wissenschaftlichen Wirkens des Professors der Prager Universität Ja. F. Kulik (1793—1863) dar. Eine Bibliographie der Werke Ja. F. Kuliks ist angeführt. Das Hauptaugenmerk gilt seinen Werken über die Zahlentheorie, im besonderen seiner Tafel der Primzahlen, die Kulik bis auf 100330201 gebracht hat. Die Geschichte der Zusammenstellung von Primzahl-tafeln wird beleuchtet.

K. A. Rybnikov. (Ref. Žurn. Mat. 1955, Nr. 2505.)

Raik, A. E.: Der uralische Mathematiker Ivan Micheevič Pervušin. Istoriko-mat. Issledovanija 6, 535—572 (1953) [Russisch].

Dies ist eine Biographie und kritische Darstellung der mathematischen Arbeiten des Priesters I. M. Pervušin (geb. 1827, gest. 1900), der von seinem elften Lebensjahr an seine ganze freie Zeit der Primzahlforschung widmete. Seine Arbeiten wurden von Tschelbychev hoch geschätzt. Er befaßte sich unter anderem mit Zahlen der Form $2^{2^n} + 1$, $2^m - 1$ usw. und entdeckte einige neue Tatsachen über sie. Den

größten Teil seines Lebens verbrachte er in einem abgelegenen Dorf. Porträt, Faksimiles und sehr genaue Quellenangaben vervollständigen den Aufsatz.

D. Tamari.

Belozero, S. E.: Die Mathematik an der Rostover Universität. *Istoriko-mat. Issledovanija* 6, 247—352 (1953) [Russisch].

Kapitelüberschriften: 1. Einführung. 2. Die ersten Mathematikprofessoren. N. Ja. Sonin. 3. Die Physikalisch-Mathematische Fakultät an der Wende des 19. zum 20. Jahrhundert. V. A. Anisimov. 4. G. F. Voronoi. 5. Die Physikalisch-Mathematische Fakultät vor der Großen Sozialistischen Oktoberrevolution. D. D. Morduchaj-Boltovskoj. 6. Die Mathematik an der Rostover Universität in der sowjetischen Periode.

Depman, I. Ja.: V. A. Steklov an der Petersburger Universität. *Istoriko-mat. Issledovanija* 6, 509—528 (1953) [Russisch].

Materialien über die Arbeit von Akademiemitglied V. A. Steklov (1862—1926) an der Petersburger Universität während der Jahre 1906—1912. Es werden vorzugsweise die gesellschaftspolitischen Anschauungen und die Tätigkeit V. A. Steklovs beleuchtet.

K. A. Rybnikov (Ref. *Žurn. Mat.* 1955, Nr. 2516.)

Câmpan, Florica T.: Ion Ionescu et les recherches sur l'histoire des mathématiques roumaines. *An. Acad. Republ. popul. Române, Ser. Mat. Fiz. Chim.* 3, 683—738, russ. u. französ. Zusammenfassg. 734—735, 736—737 (1950) [Rumänisch].

La contribution de Ion Ionescu aux recherches sur l'histoire des mathématiques roumaines présente un intérêt particulier tant du point de vue de la documentation que par le fait que cet ingénieur a réussi à attirer et à entraîner d'autres personnes dans la sphère de ces préoccupations. Beaucoup des données recueillis par I. Ionescu se trouvent dans son ouvrage „L'histoire du Génie civil en Roumainie“. Le reste est dispersé dans les articles et les notes qu'il a publiés surtout dans la revue „Gazeta Matematica“. Dans cette Note, l'A. présente presque tous les ouvrages qui ont contribué à élucider certaines des problèmes de l'histoire des mathématiques roumaines. Le but poursuivi en établissant cette bibliographie est de faciliter le travail d'orientation des futures recherches. C'est pourquoi les ouvrages cités ont été groupés, selon les siècles auxquels ils se rapportent, en ouvrages concernant: les écoles, les professeurs, les manuscrits et les livres employés, les catalogues respectifs, les personnalités qui se sont mises en évidence.

Aus der französ. Zusammenfassg.

Stipanić, Ernest: Marin Getaldic—Mathematiker, Physiker und Astronom in Dubrovnik. *Enseignement math. phys., Beograd* 2, 159—168 (1953) [Serbo-kroatisch].

Povšič, Jože: Zum hundertsten Geburtstage Franc Hočevars. *Enseignement math. phys., Beograd* 2, 226—232 (1953) [Serbo-kroatisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Vogel, Kurt: Johannes Tropfke (1866—1939). *Arch. internat. Hist. Sci.* 6, 86—88 (1953).

Bílý, Josef: Eugen Bunickij gestorben. *Časopis Mat.* 78, 287—290 (1953) [Tschechisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Novák, J.: Akademiemitglied Eduard Čech 60 Jahre. *Časopis Mat.* 78, 185—194 (1953) [Tschechisch].

Verzeichnis der wissenschaftlichen Arbeiten des Akademiemitgliedes E. Čech. *Časopis Mat.* 78, 195—198 (1953) [Tschechisch].

Čech, Eduard: Staatspreisträger Miroslav Katetov. *Časopis Mat.* 78, 277—281 (1953) [Tschechisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Frank, Ludvík: Über Professor Matyáš Lerchs Leben. *Časopis Mat.* 78, 119—137 (1953) [Tschechisch].

Skráček, Josef: Verzeichnis der Arbeiten von Professor Matyáš Lerch. *Časopis Mat.* 78, 139—148 (1953) [Tschechisch].

Výčichlo, F.: Prof. Dr. Jan Vojtěch gestorben. *Časopis Mat.* 78, 283—286 (1953) [Tschechisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

Church, Alonzo: Non-normal truth-tables for the propositional calculus. Bol. Soc. mat. Mexicana 10, Nr. 1/2, 41—52 (1953).

Ein Wahrheitstafelsystem heiße charakteristisch fur ein System des Aussagenkalkuls, wenn dessen Theoreme mit den Tautologien gemäß der Wahrheitstafel zusammenfallen. Ein charakteristisches Wahrheitstafelsystem wird vom Verf. im Anklang an R. Carnap (dies. Zbl. 35, 3) „normal“ genannt, wenn es die zweielementige Boolesche Algebra als homomorphes Bild hat und bei dessen Umkehrung der Einheit der Booleschen Algebra die Gesamtheit der ausgezeichneten Werte des Wahrheitstafelsystems entspricht. Es gibt charakteristische Wahrheitstafelsysteme, die nicht normal sind z. B. solche, die Boolesche Algebren mit mehr als zwei Elementen als homomorphes Bild haben. Ein charakteristisches System wird „streng nicht normal“ genannt, wenn es zu keiner Booleschen Algebra homomorph ist. (Solche Systeme sind in dem Sinne nicht regulär, als $p \rightarrow q$ im Falle, daß p einen ausgezeichneten und q einen nicht ausgezeichneten Wert hat, einen ausgezeichneten Wert hat.) Verf. gibt Beispiele fur verschiedene Arten von Wahrheitstafelsystemen und stellt die Frage nach einer allgemeinen Übersicht über die streng nicht normalen Systeme. Ein wesentliches Motiv fur die Untersuchung des Verf. ist ein (nicht veröffentlichter) Vorschlag von Paco Lagerstrm, derartige nicht normale Wahrheitstafelsysteme zu Unabhngigkeitsbeweisen in Prdikatenkalklen erster und hoherer Ordnung zu verwenden. Von dieser Methode werden zwei Beispiele (eines von P. Lagerstrm), betreffend die einfache Typentheorie in der Formulierung des Verf. (dies. Zbl. 23, 289), gegeben.

G. H. Müller.

Gottschalk, W. H.: The theory of quaternality. J. symbolic Logic 18, 193—196 (1953).

It is trivial that every involution in any mathematical system creates a model of the cyclic group of order two. The author tries to show the same thing for Klein's famous „Viergruppe“ (though this name and its importance in mathematics is never mentioned in the paper; it is referred to as „group of quaternality“). In lower predicate calculus, four operations are defined: I means leaving all unchanged. N : interchanging negated and unnegated variables and interchanging dual constants. C : interchanging negated and unnegated variables. D : interchanging dual constants. It is easily seen that the four operations I, N, C, D generate the Viergruppe. This does not carry over to more general situations, but it is shown that the distribution of the truth values attached to these operators may be encountered in much more general situations.

H. Guggenheimer.

Marcus, Ruth Barcan: Strict implication, deducibility and the deduction theorem. J. symbolic Logic 18, 234—236 (1953).

Johansson, Ingebrigt: Sur le concept de «le» (ou «ce qui») dans le calcul affirmatif et dans les calculs intuitionnistes. Colloques internat. Centre nat. Rech. sci. 36, 65—72 (1953).

Gilmore, P. C.: The effect of Griss' criticism of the intuitionistic logic on deductive theories formalized within the intuitionistic logic. I, II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 162—174, 175—186 (1953).

Die beiden Arbeiten bilden die Diss. des Verf. an der Amsterdamer Universität. Verf. hat die Griss'sche Kritik der intuitionistischen Logik mit dem Begriff einer G -zulässigen deduktiven Theorie folgendermaßen gefaßt. Sei K eine Logik ohne Negation derart, daß fur jedes Theorem T aus K , fur jede Teilformel P gilt, daß $(Ex_1 \cdots x_n)P$ [Abkürzung $(Ex)P$] ein Theorem aus K ist; alsdann heißt K eine genügende Logik. Sei H eine in der intuitionistischen Logik I formalisierte deduktive Theorie mit

Unterschied ($\#$). Eine in K formalisierte deduktive Theorie L heißt G -zulässig, wenn 1. die Negation nicht als primitives Zeichen auftritt, 2. die Primformeln p von L diejenigen aus H sind, für die $(Ex)p$ beweisbar ist in H , 3. mit den Formeln P und Q von L die Formel $P \& Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$, $(Ax_i)P$ und $(Ex_i)P$ nur dann auftreten (in Theoremen aus K), wenn $(Ex)P \& Q$, $(Ex)P \vee (Ex)Q$, it., $(Ex)(Ax_i)P$ und $(Ex)(Ex_i)P$ Theoreme von K sind. Es zeigt sich, daß der Teil hGC von H , der als Primformeln p (aus H) nur diejenigen enthält, für die $(Ex)p \vee (Ax) \neg p$ in H beweisbar ist, ohne Negation darstellbar ist als ein System hGC , durch folgende Festsetzungen: 1. Jede Formel $\neg P$ des Theorems T aus HGC wird ersetzt durch $P \rightarrow (u \# v)$. 2. Jede Primformel p aus T , für die $(Ax) \neg p$ ein Theorem aus H ist, wird ersetzt durch $u \# v$. 3. Jedes Primprädikat p aus T , für das $(Ex)p$ ein Theorem aus H ist, wird ersetzt durch $p \vee (u \# v)$. Es wird nun eine genügende Logik K definiert, und mit Hilfe der Primformeln aus H , der Axiome von H und obiger Festsetzungen als Definitionen ein G -zulässiges System gGC gebildet, das äquivalent ist mit hGC . Es wird ferner die Relation zwischen der Grisschen und der intuitionistischen Negation untersucht, und ihre Inäquivalenz wird gezeigt. Die Resultate gehören wesentlich der intuitionistischen Mathematik an. Verf. diskutiert, inwiefern sie auch im Lichte der Griss-schen Auffassung zutreffend sind.

B. van Rootselaar.

Ohnishi, M.: On intuitionistic functional calculus. Osaka math. J. 5, 203—209 (1953).

The following type of problem is considered. Given a definition of a property (e. g., of numbers or sequences of rationals) in prenex form $(\forall x_1)(\exists y_1) \dots (\forall x_n) \cdot (\exists y_n) F(a, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, $2^{(2n+1)}$ weakened versions are obtained by insertions of a double negation before or behind some or all of the quantifiers in the prefix. The author first considers the implicational relations between these forms on the basis of Heyting's predicate calculus HPC , thereby extending Heyting's result [J. symbolic Logic 11, 119—121 (1946)] which showed that for a single quantifier prefix a linear order is obtained with 2 of the 4 possibilities equivalent. The author goes to $\forall\exists\forall$ and $\exists\forall\exists$, obtaining branchings: e. g. $(\forall x)(\exists y) F(x, y) \rightarrow \neg \neg (\forall x)(\exists y) F(x, y)$ [resp. $(\forall x)(\exists y) \rightarrow \neg \neg F(x, y) \rightarrow \neg \neg (\forall x)(\exists y) \rightarrow \neg \neg F(x, y)$, with $\neg \neg (\forall x)(\exists y) F(x, y)$ and $(\forall x)(\exists y) \rightarrow \neg \neg F(x, y)$ incomparable since, even with one quantifier, neither $\neg \neg (\exists y) G(y) \rightarrow (\exists y) \rightarrow \neg \neg G(y)$ nor $(\forall x) \rightarrow \neg \neg G(x) \rightarrow \neg \neg (\forall x) G(x)$ is provable in HPC . The author does not verify in detail that all the asserted branchings are irreducible. Next, he considers special cases, arising in the intuitionistic theory of real numbers, thereby extending results of Kuroda [Kiso-Kagaku 12, 1—12 (1949) (Japanese)]. Here $F \leftrightarrow \neg \neg F$, and the number of inequivalent versions is reduced, e. g., to 3 for the property of a sequence $\lambda n \alpha(n)$ of rationals being a fundamental sequence; this is defined by $(\forall x)(\exists y)(\forall z) F$, F being $z \geq y \rightarrow |\alpha(z) - \alpha(y)| < 2^{-x}$ when $(\forall x)(\exists y)(\forall z) F \rightarrow \neg \neg (\forall x)(\exists y)(\forall z) F \rightarrow (\forall x) \rightarrow \neg \neg (\exists y)(z) F$. Similarly for Cauchy-equality of two sequences $\lambda n \alpha(n)$, $\lambda n \beta(n)$, we have $(\forall x)(\exists y)(\forall z) F_1$ with $z \geq y \rightarrow |\alpha(z) - \beta(z)| < 2^{-x}$ for F_1 , and for inequality we have $(\exists x)(\forall y)(\exists z) \rightarrow F_1$ with apparently 5 distinct versions, in general. If only fundamental sequences α and β in the strongest sense are considered the three versions of equality are also intuitionistically pairwise equivalent. This result supports the reviewer's impression that the piddling inelegance of some intuitionistic analysis is avoided if one restricts oneself either uniformly to the intuitionistically strongest version of the usual classical definitions or else to translations from classical formal systems into intuitionistic ones as initiated by Kolmogorov and Gödel.

G. Kreisel.

Quine, W. V.: Three grades of modal involvement. Proc. XIth internat. Congr. Philosophy (Brussels, Aug. 20—26, 1953) 14, 65—81 (1953).

Eine sorgfältige Analyse des Notwendigkeitsbegriffes (und damit der anderen

modalen Begriffe, da diese sich auf den Notwendigkeitsbegriff zurückführen lassen). Verf. unterscheidet drei Verwendungsarten: (1) In '9 > 5' ist *notwendig* haben wir ein Prädikat, welches sich auf eine Aussage bezieht. Diese kann am einfachsten identifiziert werden mit dem Prädikat, formal wahr zu sein (validity). (2) In $9 > 5$ ist *notwendig* hat man einen aussagenlogischen Operator, dagegen in (3) *Es gibt ein x , für welches $x > 5$ notwendig ist* einen Operator, der nicht nur auf Aussagen, sondern auch auf Aussageformen angewandt werden kann. Verf. favorisiert die erste Auffassung und bespricht die Schwierigkeiten, welche mit den anderen Auffassungen zusammenhängen. Man könnte z. B. (2) als eine Art Abkürzung für (1) auffassen. Dies hat u. a. die folgenden Nachteile: Man kann darin (wie die historische Erfahrung gezeigt hat) leicht die aussagenlogische Verknüpfung *wenn-so* mit der Implikation verwechseln. Ferner wird man mehr oder minder automatisch dazu verleitet, einen aussagenlogischen Notwendigkeitsoperator iteriert anzuwenden, was zu Schwierigkeiten bei der angegebenen Interpretation führt. Weiter wird man einen solchen Operator ohne besonderes Nachdenken leicht auch auf Aussageformen anwenden, womit man bei (3) angelangt ist. Hier entsteht das folgende Problem: Man wird aus dem obigen Beispiel (2) und der Aussage: *Die Zahl der Planeten ist gleich 9* nicht schließen wollen, daß es notwendig ist, daß die Zahl der Planeten > 5 ist. Man wird m. a. W. den Notwendigkeitsoperator als referentially opaque im Sinne von Russell ansehen. Dies würde bedeuten, daß in $x > 5$ ist *notwendig* die Variable x von außen für einen Quantifikator unzugänglich ist. Einen Ausweg aus dieser Schwierigkeit kann man in einer geeigneten impliziten (contextual) Definition von Kennzeichnungen — im letzten Beispiel tritt eine Kennzeichnung auf — suchen, welche auf den Notwendigkeitsoperator Rücksicht nimmt. Verf. zeigt zum Schluß, daß derartige quantifizierte Modalitäten "lead us back into the metaphysical jungle of Aristotelian essentialism".

H. Hermes.

Behmann, Heinrich: Die typenfreie Logik und die Modalität. Proc. XIth internat. Congr. Philosophy (Brussels, Aug. 20—26, 1953) 14, 88—96 (1953).

Verf. skizziert einige Überlegungen zur Interpretation der Modalitäten, „ p ist logisch notwendig (Lp)“ wird dabei gedeutet als „ p gilt in allen widerspruchsfrei denkbaren Welten“, d. h. in solchen Welten, in denen genau die logischen Gesetze gelten. Lp wird dann — wenn p_u bedeutet, daß p in der Welt u gilt — durch $(u)p_u$ („für alle u p_u “) wiedergegeben. Eine Schwierigkeit ergibt sich bei der Deutung eines Modalausdrucks $L[q(a)]$, wobei $q(a)$ als eine Prädikation über einen Bereich von „Dingen“ aufzufassen ist. Verf. schlägt zu der Behandlung dieser Schwierigkeit, die sich interpretationsmäßig besonders bei Formeln wie der der Vertauschung zweier Allquantoren zeigt, wobei der eine über „alle denkbaren Welten“, der andere über „alle denkbaren Dinge“ läuft, die Einführung eines dritten Wahrheitswertes „sinnlos“ vor.

G. H. Müller.

Feys, Robert: A simplified proof of the reduction of all modalities to 42 in S 3. Bol. Soc. mat. Mexicana 10, Nr. 1/2, 53—57 (1953).

Die genannte ursprünglich von W. T. Parry (dies. Zbl. 23, 99) bewiesene Reduktion wird hier in etwas anderer konzentrierter und übersichtlicher Weise hergeleitet.

G. H. Müller.

Seki, Setsuya: On the weakened type-logic. (Note on Metamathematics I.) Commentarii math. Univ. Sancti Pauli 2, 29—40 (1953).

Le système *SLK* (Kalkül der Stufenlogik) développé par l'A. est une extension du système *LK*, donc du système classique de Gentzen. L'extension consiste en ce que les variables et constantes ne sont pas simplement celles d'une logique fonctionnelle de 1er ordre, mais peuvent être de tous les types de la théorie de l'A. Les types sont définis dans un § 1. La théorie assigne aux variables et constantes un „type gauche“ et un „type droit“: disons sommairement qu'une expression de type

gauche α et de type droit β transforme en une expression de type β une suite d'arguments qui est de type α . L'A. définit également l'ordre d'un type, le facteur et le degré d'une formule. Les schémas du système *SLK* sont ceux de *LK*, sauf qu'il n'y a pas de schémas pour l'implication et que les schémas de généralisation valent pour tous les types. L'A. prouve que toute formule démontrable dans *SLK* y est démontrable sans coupure: sa démonstration est semblable à celle du Hauptsatz dans *LK* (on se souviendra que la démonstration de Gentzen est donnée pour *LK*). L'A. démontre également un métathéorème de „réductibilité“.

R. Feys.

Seki, Setsuya: A metatheorem of *SLK*. Commentarii math. Univ. St. Pauli 3, 31—36 (1954).

Le métathéorème démontré est le suivant: soit Γ une série de formules du système *LK* de Gentzen; si la séquence $\Gamma \rightarrow$ est démontrable dans *SLK*, elle est démontrable dans *LK*. L'A. définit la notion de „formule élémentaire“, puis une opération \mathfrak{Q} sur les termes et sur les formules élémentaires; il établit un lemme sur cette opération. Soit une séquence faisant partie d'une démonstration de $\Gamma \rightarrow$; à l'aide de l'opération \mathfrak{Q} on pourra construire une séquence déductivement équivalente, démontrable dans *LK*.

R. Feys.

Beth, E. W.: On Padoa's method in the theory of definition. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 330—339 (1953).

Um für ein bestimmtes Axiomensystem die Unabhängigkeit eines vorkommenden Begriffes a von Begriffen t_1, t_2, \dots zu beweisen, sucht man nach Padoa zwei Interpretationen A', T'_1, T'_2, \dots und A'', T''_1, T''_2, \dots , so daß T'_i mit T''_i übereinstimmt, während A' von A'' verschieden ist. Vom Verf. wird die Frage gestellt, ob man in jedem Falle bei Unabhängigkeit von a passende Modelle finden kann, die das gewünschte leisten. Die Beantwortung der Frage hängt ab von dem zugrunde gelegten logischen System, als das hier der engere Prädikatenkalkül genommen wird. Die Antwort ist positiv, abgesehen von gewissen trivialen Fällen. Bei dem nicht einfachen Beweis, für den auf die Arbeit selbst verwiesen werden muß, benutzt Verf. seine Analyse des Beweises des Satzes von Löwenheim-Skolem-Gödel (dies. Zbl. 44, 2).

W. Ackermann.

● Gonseth, Ferdinand: La géométrie et le problème de l'espace. I. La doctrine préalable. II. Les trois aspects de la géométrie. III. L'édification axiomatique. IV. La synthèse dialectique. V. Les géométries non euclidiennes. (Bibliothèque Scientifique.) Neuchâtel: Éditions du Griffon 1945. 69 p; VIII, 90 p.; 1947, 110 p.; 1949, 80 p.; 1953, 110 p.

This is an elaborate study of the different phases through which geometrical knowledge passes on its way from intuitive conception to rational knowledge. In Chapter I the author exposes the underlying philosophical attitude of "idoneism". In Chapter II he studies the intuitive, the experimental and the theoretical aspects of geometry on the level of every-day life and the relations between them. In Chapter III the process of axiomatization is described in detail and carried through to a certain extent. In Chapter IV a synthesis is accomplished between the four aspects so far considered. In Chapter V the Lobachewsky geometry is introduced by means of the Poincaré model and its independent axiomatization is sketched. Stress is laid on the consequences which the possibility of non-euclidean geometry involves for the fundamental notions such as intuition, axiomatization and reality. A sixth chapter will contain the author's solution of the "space problem".

A. Heyting (Math. Reviews 15, 594).

● Gonseth, Ferdinand: La géométrie et le problème de l'espace. VI. Le problème de l'espace. (Bibliothèque Scientifique. 27.) Paris: Dunod Éditeur; Neuchâtel: Éditions du Griffon 1955. 173 p. 1170 Fr.

After giving a sketch of plane elliptic geometry, first as geometry in the sheaf, then treated by means of the Cayley-Klein model, the author draws his conclusions on the notion of space and, more generally, on the theory of knowledge. According to him, geometry is an open science in this sense, that the intuitions and concepts underlying it, and the methods used in it, are never definitively fixed, but that they gradually define themselves and constantly refine themselves in the progress of science. He then argues that scientific knowledge in general must be of the same kind.

A. Heyting (Math. Reviews 17, 448).

Rényi, Alfred: Die ideologische Bedeutung der Bolyai-Lobačevskijschen Geometrie. Časopis Mat. 78, 149—169 (1953) [Tschechisch].

● Nagornyj, N. M.: Zur Verschärfung eines Reduktionssatzes der Theorie der Algorithmen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 341—342 (1953) [Russisch].

Mit Hilfe einer speziellen „Übersetzung“ wird bewiesen: Jeder normale Algorithmus (n. A.) über einem Alphabet A ist, in bezug auf A , einem n. A. in einem durch einen einzigen Buchstaben erweiterten Alphabet äquivalent. Dies verschärft den Reduktionssatz mit zwei Hilfsbuchstaben von A. A. Markov. (Ein A. über A ist ein A. in einer Erweiterung von A ; zwei A. \mathfrak{A} und \mathfrak{B} über A sind in bezug auf A äquivalent, wenn $\mathfrak{A}(P) = Q \Leftrightarrow \mathfrak{B}(P) = Q$ sofern P und Q Worte „in A “ sind). Das Beispiel eines besonderen über jedem A definierbaren n. A., der sogenannte Verdopplungsalgorithmus F_A mit $F_A(P) = PP$, zeigt, daß der Satz nicht verschärft werden kann, d. h. daß es Algorithmen gibt, die wesentlichen Gebrauch von (mindestens einem) Hilfsbuchstaben machen.

D. Tamari.

Detlovs, V. K.: Normale Algorithmen und rekursive Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 723—725 (1953) [Russisch].

Die von Markov behauptete und wohl allgemein anerkannte Äquivalenz seines Begriffs der normalen Algorithmen (n. A.) mit dem der allgemeinen A., und insbesondere mit dessen verschiedenen Präzisierungen, wird hier für den Begriff der rekursiven Funktionen (r. F.), im Sinne von Skolem, Gödel, Herbrand, Kleene und anderen, erhärtet und wie folgt präzisiert: Eine arithmetische F. von n Argumenten $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ heiße algorithmisch (alg.), wenn es einen n. A. \mathfrak{A} mit Alphabet $C = \{ |, * \}$ gibt, so daß $\varphi(x_1, \dots, x_n) \simeq \mathfrak{A}(x_1 * \dots * x_n)$; \simeq bedeutet, daß beide Seiten entweder gleichzeitig keinen Sinn haben oder aber dieselbe natürliche Zahl (n. Z.) darstellen; d. h. dann und nur dann wenn $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ definiert ist, ist \mathfrak{A} auf das Wort $x_1 * \dots * x_n$ anwendbar und verwandelt es in die n. Z. $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ (n. Z. werden als Folgen von Strichen „|“ geschrieben; „*“ ist ein Trennungssymbol). Die alg. F. $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ heiße vollständig alg., wenn sie stets definiert ist, d. h. wenn es einen auf alle möglichen $x_1 * \dots * x_n$ anwendbaren, d. h. abbrechenden n. A. \mathfrak{A} gibt. Zum Beweis der Rekursivität der alg. F. wird noch eine Arithmetisierung von Worten mit Hilfe zweireihiger Matrizen eingeführt. Es werden sieben Sätze formuliert, die sich in folgendem Hauptresultat zusammenfassen lassen: Der Begriff der alg. F. deckt sich mit dem der partiellen (d. h. nicht notwendigerweise stets definierten) r. F. und der der vollständig alg. F. mit dem der allgemeinen r. F.

D. Tamari.

● Freudenthal, H.: Machines pensantes. (Les conférences du Palais de la découverte. Sér. D, 24). Paris: Université de Paris 1953. 16 p.

Eine geistreiche Plauderei über die Frage, ob heutige Maschinen denken können. Am Beispiel des Schachspielers u. a. wird gezeigt: „L'identité incomplète, l'analogie, l'abstraction, l'élimination de tout ce qui est inessentiel et l'accentuation de l'essentiel, c'est ce qui caractérise jusqu'alors l'esprit des êtres vivants“. Um eine denkende Maschine entwerfen zu können, müßte man zunächst untersuchen, was Abstraktion ist und wie sie im Menschen vor sich geht.

G. Beyer.

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

Mohr, Ernst: Einfacher Beweis des verallgemeinerten Determinantensatzes von Sylvester nebst einer Verschärfung. Math. Nachr. 10, 257—260 (1953).

Der im Titel genannte Satz besagt, daß mit $0 \leq h < m \leq n$ die $\binom{n-h}{m-h}$ -reihige Determinante D , die man aus den m -reihigen Superdeterminanten der h -ten Abschnittsdeterminante A_h einer n -reihigen Determinante $A = A_n$ bilden kann, als Potenzprodukt in A_h und A_n ausdrückbar ist [vgl. G. Kowalewski, Determinanten (dies. Zbl. 27, 197), S. 100]. Verf. gibt hierfür einen kurzen direkten Beweis mittels vollständiger Induktion nach n und bestimmt darüber hinaus auch den Rang von D , beides für einen beliebigen kommutativen Grundkörper.

H. Rohrbach.

Parodi, Maurice: Application des polynomes de Tchebicheff à la formation de matrices dont le polynome caractéristique est irréductible sur le corps des nombres rationnels. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 567—568 (1953).

Bekanntlich ist das Polynom $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ mit ganzen reellen Koeffizienten irreduzibel, wenn es im Einheitskreis $n-1$ Nullstellen und außerhalb dieses Kreises eine Nullstelle besitzt. Zu dem Polynom $f(x)$ gehört eine assoziierte Matrix A n -ter Ordnung, für die $f(x)$ das charakteristische Polynom ist. Nach dem Memorialheft vom Verf. (dies. Zbl. 46, 16) folgt die Irreduzibilität von $f(x)$ aus gewissen Ungleichungen zwischen seinen Koeffizienten. Bestehen diese Ungleichungen, so ist das charakteristische Polynom der Matrix A^m für jede ganze positive Zahl m irreduzibel. Zwischen den charakteristischen Werten x_i und X_i der Matrix A und A^m gilt $|X_i| = |x_i|^m$. Der „allgemeinere“ Satz des Verf.: „Ist $F(X)$ ein Polynom mit ganzen reellen Koeffizienten mit $|F(x)| < 1$, für $|x| < 1$ und $|F(x)| > 1$ für $|x| > 1$, so hat das charakteristische Polynom der Matrix $F(A)$ die charakteristischen Werte $X_i = F(x_i)$ “, ist trivial, da nur $\pm x^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) den gestellten Bedingungen genügt. Anwendung auf Tschebyscheffsche Polynome.

Gy. Sz.-Nagy.

Tomić, Miodrag: Sur un théorème de L. Berwald. Srpska Akad. Nauk, Zbornik Radova mat. Inst. 35, Nr. 3, 85—88 und französ. Zusammenfassg. 88 (1953) [Serbisch].

En utilisant une méthode géométrique élémentaire, on déduit une simple démonstration du suivant théorème de L. Berwald [cf. Math. Z. 37, 61—76 (1933); ce Zbl. 6, 244, th. 3, p. 70]: Si les coefficients d'un polynôme (1) $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$ satisfont aux conditions

(2) $0 > c_0 > c_1 > \dots > c_{k-1}$, $c_k > c_{k+1} > \dots > c_n > 0$, $0 \leq k \leq n+1$, $c_{-1} = c_{n+1} = 0$, alors (1) possède sur la circonférence du cercle unité au plus un zéro simple $x = 1$ et dans le cercle unité k ou $k-1$ zéros selon que $f(1) > 0$ ou ≤ 0 . La même méthode géométrique donne immédiatement le théorème suivant de A. Brauer [Math. Nachr. 4, 250—257 (1951); ce Zbl. 42, 15, th. 2]: Le polynôme (3) $f(x) = x^n - (a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n)$, dont les coefficients sont des nombres entiers satisfaisant (4) $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$, a tous ses zéros, à l'exception d'un, dans le cercle unité.

[Französische Zusammenfassg.]

Raljević, Šekija: Sur une droite et sur un segment caractéristique dans les polygones des zéros des polynômes. Srpska Akad. Nauk, Zbornik Radova mat. Inst. 35, Nr. 3, 89—94 und französ. Zusammenfassg. 94 (1953); Corrigenda. Ibid. 43, 144 (1955) [Serbo-kroatisch].

Möge das Polynom n -ten Grades $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $a_n \neq 0$, p verschiedene Wurzeln z_1, \dots, z_p der Vielfachheit m_1, \dots, m_p , $\sum m_v = n$, haben. Schwerpunkt des Polynoms $P_n(z)$ wird der Punkt $\zeta_1 = \frac{\sum m_v z_v}{\sum m_v} = -\frac{a_{n-1}}{n a_n}$ genannt. — Schwerpunkt des Polygons der Nullstellen des Polynoms $P_n(z)$ wird der Punkt $\zeta_2 = p^{-1} \sum z_v$

genannt. Mit ζ_1^* bezeichnen wir den Schwerpunkt der Nullstellen der Ableitung $P_n'(z)$, die mit denen des Polynoms $P_n(z)$ nicht übereinstimmen. Verf. beweist, daß die drei Punkte ζ_1, ζ_2 und ζ_1^* auf einer Geraden liegen. — In der zweiten Note wird eine Ungenauigkeit berichtigt, die sich in die erste Arbeit eingeschlichen hatte.

N. S. Mejman (Ref. Žurn. Mat. 1958, Nr. 7658).

Meserve, Bruce E.: Irreducibilità del risultante e del discriminante. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 243—252 (1953).

Sei R die Resultante zweier Polynome, D die Diskriminante eines Polynoms einer Unbestimmten mit unbestimmten Koeffizienten über einem kommutativen Ring \mathfrak{R} mit Einselement („Charakteristik“ k). Die Irreduzibilitätseigenschaften von R und D über nullteilerfreien Ringen \mathfrak{R} sind geläufig. Aus einfachen formalen Eigenschaften von R und D folgert Verf. allgemein: R ist irreduzibel; D ist Quadrat eines irreduziblen Polynoms, falls $k = 2, 4$ und sonst irreduzibel. Dabei wird ein modifizierter Irreduzibilitätsbegriff zugrunde gelegt, indem nur solche Zerlegungen $F = GH$ zugelassen werden, für die in bezug auf jedes Teilsystem der Unbestimmten x_i und auch nach jeder Transformation $x_i = y_i^{j_i}$ ($j_i \geq 1$) $\text{Grad } F = \text{Grad } G + \text{Grad } H$ gilt (bei nullteilerfreiem \mathfrak{R} von selbst erfüllt).
H. Orsinger.

Krull, Wolfgang: Galoissche Theorie und Eliminationstheorie. Revista Acad. Ci., Madrid 47, 469—490, spanische Zusammenfassg. 491—494 (1953).

Die Galoissche Gruppe \mathfrak{G} eines Polynoms $x^n - a_1 x^{n-1} + \dots \pm a_n = (x - \alpha_1) \cdot \dots (x - \alpha_n)$ über einem Körper \mathfrak{K} , aufgefaßt als Permutationsgruppe der α_i , kann bekanntlich charakterisiert und „berechnet“ werden als Gruppe derjenigen Permutationen, die, angewandt auf w_1, \dots, w_n , eine gewisse Form $I(w_0, w_1, \dots, w_n)$ festlassen. Es sei $s_i(u)$ die i -te symmetrische Grundfunktion von u_1, \dots, u_n . Man sieht leicht, daß für $I(w)$ (bei jeweils passender Numerierung der α_i) jeder irreduzible Faktor $R_0(w)$ der w -Resultante $R(w)$ des zu dem von den α_i trivialerweise erfüllten Gleichungssystem

$$p_{01}(u) = s_1(u) - a_1 = 0, \dots, p_{0n}(u) = s_n(u) - a_n = 0$$

gehörigen und mit ihm gleichwertigen homogenen Systems

$$\varphi_{01}(v) = s_1(v) - a_1 v_0 = 0, \dots, \varphi_{0n}(v) = s_n(v) - a_n v_0^n = 0$$

genommen werden kann. Verf. untersucht im Anschluß an einen Hinweis von San Juan [Revista Acad. Ci., Madrid 39, 11—40, 137—184, 423—461 (1945)], in welcher Weise die Kenntnis nichttrivialer Wurzelrelationen die Bestimmung von \mathfrak{G} „erleichtert“. Es wird gleich die Möglichkeit berücksichtigt, daß es sich um Relationen

$$p_1(x) = 0, \dots, p_M(x) = 0$$

über einem Teilkörper K mit $\mathfrak{R} = K(a_1, \dots, a_n)$ handelt, und dabei werden nach zunehmender Schwierigkeit drei Fälle betrachtet. Mit $q(r)$ werde stets die durch Homogenisierung aus $p(u)$ entstehende Form bezeichnet. — 1. Im Falle $\mathfrak{R} = K$ kann für $I(w)$ jeder irreduzible Faktor $E_0(w)$ der w -Resultante $E(w)$ des Systems.

$$q_{0i}(v) = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad q_k(r) = 0 \quad (k = 1, \dots, M)$$

genommen werden. Da $E(w)$ ein im allgemeinen echter Teiler von $R(w)$ ist, liegt der grundsätzliche Wert bekannter Wurzelrelationen darin, daß die Bestimmung von \mathfrak{G} auf die Faktorzerlegung einer Form kleineren Grades zurückgeführt wird. Während die Faktorzerlegung nur bei speziellen Grundkörpern rational durchführbar ist und dann auf einem Probierv erfahren beruht, ist die Bestimmung der w -Resultante, obwohl ungeheuer mühsam, leicht systematisierbar und vielleicht maschinell durchführbar. Ein Relationensystem heiße „ausreichend“ (zur Bestimmung von \mathfrak{G}), wenn das zugehörige $E(w)$ bereits irreduzibel ist. — 2. Wenn \mathfrak{R} über K algebraisch ist, hat man ein Relationensystem $P_{0i}(x) = 0$ ($i = 1, \dots, M_0$), das \mathfrak{R} als Erweiterung

von K eindeutig bestimmt. Setzt man jetzt $p_{0i} = P_{0i}(s_1(u), \dots, s_n(u))$, so kann man mit dem System

$$\varphi_{0i}(v) = 0 \quad (i = 1, \dots, M_0), \quad \varphi_k(v) = 0 \quad (k = 1, \dots, M)$$

genau so verfahren wie im ersten Fall. Für $\mathfrak{R} \supset K$ ist lediglich der Grad von E_0 ein echtes Vielfaches der Ordnung g von \mathfrak{G} , während er für $\mathfrak{R} = K$ gleich g ist. Um die Gleichwertigkeit von inhomogenen und homogenem System zu garantieren, d. h. nichttriviale Lösungen mit $v_0 = 0$ auszuschließen, muß man allerdings, was stets möglich ist, die P_{0i} noch so wählen, daß die q_{0i} eine H -Basis des dem Ideal $(p_{01}(u), \dots, p_{0M_0}(u))$ in $K[u_1, \dots, u_n]$ entsprechenden H -Ideals in $K[v_0, v_1, \dots, v_n]$ bilden.

— 3. Wenn \mathfrak{R} über K transzendent ist, kann man Lösungen mit $v_0 = 0$ nicht wie vorher ausschließen und muß statt auf die homogene Eliminationstheorie auf tieferliegende Tatsachen der Polynomidealtheorie zurückgreifen. Man kann \mathfrak{G} in diesem Fall ähnlich wie im algebraischen Fall durch Berechnung und Faktorzerlegung des „Grundpolynoms“ (s. Krull, dies. Zbl. 34, 168) des Ideals $\mathfrak{a} = (p_{01}(u), \dots, p_{0M_0}(u), p_1(u), \dots, p_M(u))$ bestimmen. Es gilt das für praktische Zwecke wichtige Resultat: Das Relationensystem $p_k(\alpha)$ ($k = 1, \dots, M$) ist ausreichend genau dann, wenn \mathfrak{a} ein einziges minimales Primoberideal besitzt. Wenn das System ausreichend ist, so gehört die Permutation $\alpha_i \rightarrow \alpha_{i'}$ zu \mathfrak{G} genau dann, wenn eine Potenz von $p_k(u_1, \dots, u_n)$ in \mathfrak{a} liegt ($k = 1, \dots, M$).

H. Orsinger.

Gruppentheorie:

Tamura, Takayuki: Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3. J. Gakugei Tokushima Univ., natur. Sci. Math. 3, 1—11 (1953).

A number of results are proved concerning extensions of semi-groups, and applied to the determination of all semi-groups of orders two and three.

A. H. Clifford (Math. Reviews 15, 7).

Pták, Vlastimil: Die Einbettung von Semigruppen. Časopis Mat. 78, 259—261 (1953) [Tschechisch].

Vgl. dies. Zbl. 52, 258.

Schwarz, Štefan: Contribution to the theory of torsion semigroups. Czechosl. math. J. 3 (78), 7—20, engl. Zusammenfassg. 20—21 (1953) [Russisch].

Unter einer Halbgruppe S verstehen wir eine Menge, in der eine binäre assoziative Verknüpfung erklärt ist. In der ganzen Arbeit setzt man voraus, daß zu jedem Elemente $a \in S$ ein natürliches q existiert, so daß a^q ein Idempotent ist (d. h. daß S eine periodische Halbgruppe ist). Erfüllt ein $a \in S$ die vorhergehende Bedingung, dann sagt man, daß a zu dem Idempotent a^q gehört. Ist $n > 1$ die kleinste Zahl, für die ein $m, m < n$, existiert, für das $a^m = a^n$ gilt, dann nennen wir die Folge a, a^2, \dots, a^{m-1} eine Vorperiode des Elementes a . Jede Halbgruppe umfaßt mindestens ein Idempotent e . Eine Teilhalbgruppe P_e in S heißt eine maximale zu einem Idempotenten e gehörige Halbgruppe, wenn gilt: a) P_e umfaßt ein einziges Idempotent e , b) ist P' eine nur ein Idempotent umfassende Teilhalbgruppe in S , $P_e \subseteq P'$, dann gilt $P_e = P'$. Zu jedem Idempotenten e gehört mindestens eine maximale Halbgruppe P_e . Sind e, f Idempotenten, $e \neq f$, dann gilt für jedes P_e, P_f , $P_e \cap P_f = \emptyset$. Es werden hinreichende Bedingungen festgestellt, unter denen die maximalen Halbgruppen P_e eindeutig bestimmt sind und $S = \sum P_e$ gilt (die Kommutativität oder die komplette Nichtkommutativität). Analog wie oben wird eine maximale Gruppe G_e , die zu einem Idempotenten e gehört, definiert. Zu jedem e gehört genau eine G_e . G_e besteht genau aus den Elementen, die zu e gehören und die keine Vorperiode haben. Dann und nur dann gilt $S = \sum G_e$, wenn kein $a \in S$ eine Vorperiode hat. Es sei $x, y \in S$, $I_x = \{x, xS, Sx, SxS\}$. Nach der Vorschrift $x \sim y \Leftrightarrow I_x = I_y$ wird eine Äquivalenzrelation auf S definiert; die Klassen von

äquivalenten Elementen werden F -Klassen genannt. Ist S kommutativ, dann ist jede G_e eine F -Klasse und jede P_e die Vereinigung von F -Klassen. Es werden weitere Eigenschaften der kommutativen Halbgruppen festgestellt. F. Šik.

Schwarz, Stefan: On maximal ideals in the theory of semi-groups. I, II. Czechosl. math. J. **3** (78), 139–152, 365–381, engl. Zusammenfassg. 152–153, 382–383 (1953) [Russisch].

Unter einem maximalen (linksseitigen, rechtsseitigen, zweiseitigen, weiter nur l.-, r.-, z.-) Ideal einer Halbgruppe S verstehen wir ein maximales Element in der durch die Inklusion teilgeordneten Menge von (l.-, r.-, z.-) Idealen $\neq S$ in S . Alle für l.-Ideale im weiteren formulierten Sätze kann man auch für r.-Ideale und größtenteils auch für z.-Ideale aussprechen. Es existiert entweder höchstens ein maximales l.-Ideal in S oder die Vereinigung von maximalen l.-Idealen ist gleich S . Das einzige maximale l.- (r.-, z.-) Ideal in S (wenn es existiert), bezeichnen wir mit $L^* (R^*, M^*)$. Wenn es existiert, sagen wir kurz, daß ein $L^* (R^*, M^*)$ in S besteht. Eine Menge $Q \subseteq S$ nennen wir ein l.- (r.-, z.-) Antiideal in S , wenn $SQ \cap Q = \emptyset$ ($Q \cap Q = \emptyset$, $\{SQ, Q, S, SQS\} \cap Q = \emptyset$). Die Existenz eines l.- (r.-, z.-) Antiideales in S drücken wir kurz folgenderweise aus: in S besteht ein Q_i (Q_r, Q_m). Besteht in S ein L^* und kein Q_i und ist L^* ein z.-Ideal, dann ist $T_l = S - L^*$ eine linksseitige reguläre Halbgruppe (d. h. $a, b \in T_l$: es existiert ein $x \in T_l$, so daß $xa = b$ gilt.) Besteht ein L^* in einer periodischen Halbgruppe, dann ist L^* ein z.-Ideal und $S - L^*$ ist die Vereinigung von untereinander elementfremden isomorphen Gruppen. Wenn in S die Minimalbedingung für l.-Ideale befriedigt ist und in S ein L^* besteht sowie ein z.-Ideal $\neq S$, dann besteht auch ein M^* . Aus den vorangehenden Sätzen folgen unmittelbar einige Korollare. — Im zweiten Teil der Arbeit wird die Struktur der Mengen $S - L$, $S - M$ studiert, wobei L bzw. M ein maximales l.- bzw. z.-Ideal einer Halbgruppe S bedeutet. Ein minimales Element der durch die Inklusion teilgeordneten Menge aller l.-Ideale $\neq \{0\}$ in S heißt ein minimales l.-Ideal. (Analog für die r.- und z.-Ideale.) Die Menge, die aus einem z.-Ideale m in S und aus allen Elementen aus $S - m$ besteht, ist eine Halbgruppe, die wir mit S/m bezeichnen wollen. Setzen wir voraus, daß M ein maximales z.-Ideal in S und $S - M$ eine Halbgruppe ist. Dann ist $S - M$ die Vereinigung von untereinander elementfremden linksseitig regulären Halbgruppen bzw. isomorphen Gruppen, wenn noch die folgende Bedingung a) bzw. eine der Bedingungen b) — c) erfüllt ist: a) S/M umfaßt ein minimales l.-Ideal. b) S/M umfaßt ein minimales l.- und r.-Ideal. c) S ist endlich. d) In $S - M$ besteht ein minimales l.-Ideal und ein Idempotent. e) S ist periodisch und es gilt a). Weitere Untersuchungen werden durch folgende Sätze repräsentiert: 1. Umfaßt $S - M$ mehr als ein Element, gilt a) und besteht in S nur ein M umfassendes l.-Ideal L , dann ist $J = M$ und $S - M$ ist eine linksseitig reguläre Halbgruppe. 2. Wenn ein L^* und ein z.-Ideal $\neq S$ in S besteht, dann besteht ein M^* in S . Wenn überdies $S - L^*$ mindestens zwei Elemente umfaßt und die Bedingung a) für $M = M^*$ erfüllt ist, dann gilt: $\alpha)$ $L^* = M^*$; $\beta)$ $S - L^*$ ist eine linksseitig reguläre Halbgruppe. 3. Wenn S ein rechtsseitiges Einheits-element und ein z.-Ideal $\neq S$ umfaßt, dann besteht ein L^* und M^* in S . Existiert überdies ein minimales l.-Ideal in S/M , dann ist $S - L^*$ die Vereinigung von elementfremden isomorphen Gruppen.

F. Šik.

Asano, Keizo and Kentaro Murata: Arithmetical ideal theory in semigroups. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A **4**, 9—33 (1953).

This paper concerns with the arithmetical ideal theory in non-commutative semigroups, and the results may be considered as an abstract foundation of Artin-Henke's ideal theory (Henke, this Zbl. **13**, 51). (§ 1) Let G be a lattice-ordered group (l -group) with unity e . An element a of G is called integral if $a \neq e$. Let G be commutative. Then any two factorizations of an integral element a in G have the same refinement (refinement theorem). Furthermore, if we assume the ascending chain condition for integral elements of G then any integral element of G can be uniquely represented as the product of finite prime elements, and G is the direct product

of infinite cyclic groups. (§ 2) Now let L be a complete lattice-ordered (c. l.) semigroup such that there exists a mapping of L into itself: $a \rightarrow a^{-1}$, with the following properties (i) $a a^{-1} a \leq a$, (ii) $a x a \leq a$ implies $x \leq a^{-1}$. Let e be the unity of L and assume that e is maximally integral, namely, $e \leq c$ and $c^2 \leq c$ implies $c = e$. Then L forms a residual lattice. Let $a^* = (a^{-1})^{-1}$ and $a, b \in L$ are called quasi-equal if $a^* = b^*$. Then the set G of all classes of quasi-equal elements of L forms a c. l.-group. Hence G is commutative and distributive. Thus the results of § 1 can be applied to G . (§ 3—§ 7) These results can be applied to the theory of two-sided ideals with respect to a maximal order of a semigroup S with unity, and also to the theory of normal ideals of S . This paper has relations with the investigations by A. Clifford (this Zbl. 25, 8), by P. Lorenzen (this Zbl. 21, 387) (in commutative semigroups) and by Y. Kawada and K. Kondo (this Zbl. 22, 104). Y. Kawada.

Zappa, Guido: Omomorfismi del reticolo dei sottogruppi di un gruppo finito. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 253—256 (1953).

Es sei φ ein Homomorphismus des Untergruppenverbandes einer endlichen Gruppe G auf einen Verband L . Bezeichne G_0 (bzw. E) die kleinste (größte) Untergruppe von G , die durch φ auf das größte (kleinste) Element von L abgebildet wird. Es gibt in G zwei Normalteiler N und R und eine Untergruppe T mit den folgenden Eigenschaften: 1. $NTR = G$, $N \cap T = N \cap R = T \cap R = e$; 2. die Ordnungen von N, T, R sind paarweise teilerfremd; 3. TR enthält G_0 , während N in E und R in G_0 enthalten ist; 4. entweder: T ist zyklisch und $E = R = e$; oder: T ist das direkte Produkt einer zyklischen Gruppe von ungerader Ordnung mit einer verallgemeinerten Quaternionengruppe, ferner $E \cap R = e$, und die Ordnung von G_0 ist eine durch 4 unteilbare gerade Zahl; oder endlich: T ist zyklisch, R enthält eine Sylowuntergruppe, die eine verallgemeinerte Quaternionengruppe ist, und $E \cap R$ ist eine Gruppe der Ordnung 2 im Zentrum von G ; diese drei Möglichkeiten schließen einander aus; 5. die Elemente von N sind mit denen von G_0 vertauschbar; 6. ist $\varphi(X) = \varphi(Y)$ und gehören X und Y zu derselben zyklischen Untergruppe von Primzahlpotenzordnung in G , so sind alle Elemente oder Untergruppen von R , die mit den Elementen von Y vertauschbar sind, auch mit denen von X vertauschbar; 7. alle in der Ordnung von TR/G_0 vorkommenden Primzahlen teilen die Ordnung von G_0 . Dieser Satz samt weiteren Behauptungen wird ohne Beweis mitgeteilt. L. Fuchs

Morita, Kiiti: On group rings over a modular field which possess radicals expressible as principal ideals. Sci. Reports Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A 4, 177—194 (1951).

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper von Primzahlcharakteristik p und \mathfrak{G} eine endliche Gruppe. Der Gruppenring von \mathfrak{G} über K werde mit Γ bezeichnet. Ferner sei \mathfrak{P} eine p -Sylowgruppe von \mathfrak{G} und \mathfrak{N} sei der größte Normalteiler in \mathfrak{G} mit zu p teilerfremder Ordnung. Ein Ring heißt quasi-primär, wenn er direkt unzerlegbar in zweiseitige Ideale ist und bei einer Zerlegung in eine direkte Summe direkt unzerlegbarer Linksideale jedes dieser Ideale in der gleichen Vielfachheit auftritt. Verf. beweist, daß Γ genau dann direkte Summe quasi-primärer zweiseitiger Ideale ist, wenn $\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ Normalteiler in \mathfrak{G} und die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ abelsch ist. Dann wird die Struktur solcher Ringe untersucht, deren Radikal sich sowohl als Haupt-Linksideal als auch als Haupt-Rechtsideal schreiben läßt. Es wird bewiesen, daß dieses in Γ genau dann der Fall ist, wenn \mathfrak{P} zyklisch und $\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ Normalteiler in \mathfrak{G} ist. Im Anschluß hieran wird der Fall einer zyklischen p -Sylowgruppe \mathfrak{P} genauer behandelt. P. Wolf.

Mal'cev, A. I.: Über die Möglichkeit, eine teilweise geordnete Gruppe zu ordnen. Trudy mat. Inst. Steklov, Nr. 38, 173—175 (1951) [Russisch].

G sei eine Gruppe, \leq bzw. $<$ eine teilweise bzw. einfache Anordnung auf G , so daß (G, \leq) bzw. $(G, <)$ eine teilweise bzw. einfach geordnete Gruppe und die identische Abbildung von (G, \leq) auf $(G, <)$ isoton ist. Dann sagen wir, daß die teilweise geordnete Gruppe (G, \leq) sich ordnen läßt. Verf. beweist den Satz: Jede lokal nilpotente torsionsfreie teilweise geordnete Gruppe läßt sich ordnen. F. Šik.

Dobrescu, Andrei: Sur les groupes de Lie à trois paramètres. Acad. Republ. popul. Române, Bul. ști., Sect. Ști. mat. fiz. 5, 75—81, russ. und französ. Zusammenfassg. 80—81 (1953) [Rumänisch].

Les groupes G_3 de Lie réels ont été classifiés, en suivant des méthodes différentes, par L. Bianchi, G. Vranceanu et H. C. Lee. Les formes canoniques des structures des groupes G_3 n'étant pas les mêmes dans les trois classifications, il était

nécessaire d'en établir l'équivalence. Dans ce travail, on établit en premier lieu l'équivalence entre les classifications de Lee et de Bianchi, et, après avoir obtenus des formes plus simples pour les structures de certains groupes G_3 , données par Vranceanu, on établit l'équivalence des classifications de Vranceanu et Bianchi. *G. Vranceanu*.

Baum, John D.: An equicontinuity condition for transformation groups. Proc. Amer. math. Soc. 4, 656—662 (1953).

Généralisation d'un théorème de Kakutani: soit (X, T, π) un groupe de transformations topologiques: X compact T_2 , X ensemble minimal et T abélien. T est equi-continu si et seulement si pour un $x_0 \in T$ et pour toute applications f de X dans R la fonction $f(x_0 \cdot t) = f(x_0) \cdot t$ est presque-periodique dans l'espace fonctionnel (topologique uniforme) muni de sa structure naturelle de groupe de transformations topologiques. *G. Reeb*.

Verbände. Ringe. Körper:

Benado, Mihail: Sur une généralisation de la notion de structure. Acad. Republ. popul. Române, Bul. ști. Sect. Ști. mat. fiz. 5, 41—48, russ. und französ. Zusammenfassg. 46—48 (1953) [Rumänisch].

Verf. definiert als Multiverband eine geordnete Menge E so, daß für irgend zwei Elementen aus E unter jeder gemeinsamen oberen Schranke eine minimale, über jeder gemeinsamen unteren Schranke eine maximale liegt. Einige Eigenschaften und weitere Definitionen werden ohne Beweis angeführt. Inzwischen ist eine ausführliche Darstellung mit Beweisen erschienen: s. dies. Zbl. 56, 46 sowie Czechosl. math. J. 5 (80), Nr. 3, 308—344 (1955). Weitere Anwendungen s. dies. Zbl. 57, 253, 265. *W. Felscher*.

Janoš, L.: Properties of the Zassenhaus refinement. Czechosl. math. J. 3, 159—179, engl. Zusammenfassg. 180 (1953) [Russisch].

Siano date, in un reticolo S , due catene $\{a_i\}$, $\{b_k\}$ di estremi comuni a e b ($i = 0, \dots, r$; $k = 0, \dots, s$; $a = a_0 = b_0$; $b = a_r = b_s$). Si chiama raffinamento di Zassenhaus (inferiore) delle catene $\{a_i\}$, $\{b_k\}$ la coppia di catene $\{a_{i,j}\} = \{a_{i+1} \wedge (a_i \vee b_j)\}$, $i = 0, 1, \dots, r-1$; $j = 0, 1, \dots, s$; $\{b_{k,l}\} = \{b_{k+1} \vee (b_k \wedge a_l)\}$, $k = 0, 1, \dots, s-1$; $l = 0, 1, \dots, r$. Si ha: $\{a_i\} \subseteq \{a_{i,j}\}$; $\{b_k\} \subseteq \{b_{k,l}\}$; si parlerà di raffinamento proprio quando in almeno una delle due relazioni non vale il segno di uguale. Il risultato fondamentale della Parte 1 della nota è il seguente (teorema 1, 7): In un reticolo modulare la condizione necessaria e sufficiente affinché la costruzione di Zassenhaus non conduca a un raffinamento proprio di due catene (di estremi comuni) è che le due catene siano semplicemente simili inferiormente. (X. B.: Due catene: $a = x_0 \vee x_1 \vee \dots \vee x_n = b$, $a = y_0 \vee y_1 \vee \dots \vee y_n = b$ si dicono semplicemente simili inferiormente se esiste una permutazione f degli indici $i = 0, 1, \dots, n-1$ tale che: $x_i \vee x_{i+1} \sim_j y_{f(i)} \vee y_{f(i)+1}$; il simbolo \sim_j sta ad indicare che esiste un intervallo u, v del quale sia $x_i \vee x_{i+1}$ che $y_{f(i)} \vee y_{f(i)+1}$ sono trasposti — o „direttamente simili“ — inferiormente, tale cioè che: $x_{i+1} \wedge u = x_i \vee x_{i+1} \wedge u = v$, ecc.)

Nella Parte 3, il risultato fondamentale è un teorema, analogo a quello ora enunciato, valido nel reticolo dei sottogruppi di un gruppo (teor. 3, 4): In un gruppo con serie di composizione, condizione necessaria e sufficiente affinché la costruzione di Zassenhaus non conduca a un raffinamento proprio di due catene normali, è che esse siano semplicemente simili inferiormente. Le catene $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ si chiameranno un raffinamento di Schreier delle catene $\{a_i\}$, $\{b_k\}$, aventi gli stessi estremi a, b , se: 1. esse sono raffinamenti risp. di $\{a_i\}$, $\{b_k\}$; 2. esse sono semplicemente simili inferiormente. — In un reticolo modulare (teor. 1, 5) il raffinamento di Zassenhaus di due catene $\{a_i\}$, $\{b_k\}$ è anche raffinamento di Schreier. Nella Parte 2, l'A. dimostra che, sempre nel caso modulare, il raffinamento di Zassenhaus è un raffinamento di Schreier di lunghezza minima (teor. 2, 3), che esso è anzi l'unico raffinamento di Schreier nel subreticolo (finito) M generato dalle due catene (teor. 2, 5), potendo però, nell'intero reticolo S , esistere raffinamenti di Schreier di lunghezza minima, delle due catene date, diversi dal loro raffinamento di Zassenhaus (come l'A. dimostra su di un esempio). *L. Lombardo-Radicé*.

Vitner, Čestmír: The semimodular conditions in the lattices. Czechosl. math. J. 3, 265—281, engl. Zusammenfassg. 281—282 (1953) [Russisch].

Siano a, b, c, d due intervalli, o „quozienti“, trasposti (o „direttamente simili“, cioè tali che $a = b \vee c$, $d = b \wedge c$). Simbolo: $a/b \sim_d c/d$. Rappresentazione regolare inferiore (superiore) di a/b in c/d (di c, d in a, b): ad $x \in a/b$ si fa corrispondere $y = x \wedge c \vee d$ ($a, y \in c/d$ si fa corris-

pondere $x = y \vee b \in a/b$). Sia S un reticolo; $b, c \in S$. $x \in S$ si dirà γ -modulare rispetto a b, c se $x \geq b$ implica: $x \wedge (c \vee b) = (x \wedge c) \vee b$; β -modulare rispetto a b, c se $b \geq y$ implica $b \wedge (c \vee y) = (b \wedge c) \vee y$. Condizione inferiore degli intervalli primi: se $a/b \sim_d c/d$, e a/b primo (a copre b), allora anche c/d primo; dualmente per la condizione superiore (N. B.: tali condizioni sono equivalenti alla semimodularità inferiore e superiore di Birkhoff, cioè alla sopramodularità e sottomodularità nel linguaggio di Zappa, se nel reticolo tutte le catene sono finite). Condizione inferiore delle catene complete: sia $a/b \sim_d c/d$; sia $\{a_i\}$ una catena

completa (massima) tra a e b ; ponendo $c_i = a_i \wedge c$ la catena $\{c_i\}$ è anch'essa completa. Dualmente la condizione superiore. Condizione di massimo (di minimo) per le catene di S : ogni parte non vuota di una qualsiasi catena $R(a, b)$ contiene un elemento massimo (minimo). Condizione γ : ha luogo quando e solo quando per ogni coppia di intervalli trasposti $a/b \sim_d c/d$

e per ogni catena massima $\{a_i\}$ di estremi a, b l'insieme K_d degli elementi di $\{a_i\}$ che non sono γ -modulari rispetto a b, c o è vuoto, o possiede un elemento massimo. Dualmente la condizione β (usando la β -modularità). Condizione π_1 (π_2) di semimodularità inferiore (superiore): ha luogo in un reticolo S quando e solo quando in S sono verificate la condizione γ e la condizione inferiore (superiore) delle catene massime (la condizione β e la condizione superiore delle catene massime). Nel presente lavoro, l'A. dimostra che le condizioni π_1, π_2 risolvono un problema posto dal V. Korinek, in quanto: I-sono duali; II-in ogni reticolo π_1 (π_2) implica la condizione inferiore (superiore) degli intervalli primi; III-Nei reticoli, tutte le catene dei quali sono finite, π_1 (π_2) è equivalente alla condizione inferiore (superiore) degli intervalli primi; IV-un reticolo è modulare quando e solo quando sono soddisfatte insieme π_1 e π_2 . L'A. dimostra su di un esempio che le condizioni γ, β e le condizioni delle catene massime sono indipendenti; espone poi altre condizioni necessarie e sufficienti per la modularità di un reticolo. Nel § 2, l'A. si occupa del teorema di Schreier. Date due catene massime R_1, R_2 tra a e b si estrarrebbero da esse due catene finite. Se di esse esistono (in R_1, R_2) due „raffinamenti“ finiti tali che sia possibile stabilire tra di essi una corrispondenza biunivoca, tra intervalli aventi per estremi elementi contigui, in modo che intervalli corrispondenti siano semplicemente simili inferiormente si dirà che in S vale il teorema di Schreier con similitudine inferiore semplice degli intervalli. ($a/b, c/d$ semplicemente simili inferiormente—e quindi „proiettivi“—se esiste un u tale che: $a/b \sim_d u/r; c/d \sim_d u/r$). L'A. stabilisce

alcune relazioni tra il teorema di Schreier e le condizioni π_1, π_2 . Così, ad es., fa vedere che può essere verificata π_1 senza che lo sia il teorema di Schreier con similitudine inferiore degli intervalli; che, invece, se detto teorema vale, vale anche la condizione inferiore delle catene massime.

L. Lombardo-Radicé.

Raney, George N.: A subdirect-union representation for completely distributive complete lattices. Proc. Amer. math. Soc. 4, 518—522 (1953).

Verf. beantwortet eine Frage (no. 69) von G. Birkhoff durch den Beweis, daß jeder völdistributive vollständige Verband durch einen vollständigen Verbandsisomorphismus in ein direktes Produkt vollständiger Ketten abgebildet werden kann. Der Beweis ist keineswegs trivial.

P. Lorenzen.

Andreoli, Giulio: Funzioni simmetriche, involuzioni ed n -adi in un'algebra di Boole. Giorn. Mat. Battaglini 81 (V. Ser. 1), 181—198 (1953).

x^* sei das Komplement zu x . Verf. bildet $P(a, b, \dots, m)$ und $D(a, b, \dots, m)$, die Vereinigung aller Elemente, die aus a, b, \dots, m dadurch entstehen, daß man eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Faktoren durch ihre Komplemente ersetzt. Es ist $P(a, b, \dots, m) = D(a, b, \dots, m)^*$, $P(a, b, \dots, m) = a P(b, \dots, m) \cup a^* D(b, \dots, m)$, $D(a, b, \dots, m) = a D(b, \dots, m) \cup a^* P(b, \dots, m)$. Daraus ergeben sich einige weitere Beziehungen. (Die letzten vier auf S. 186 dürften durch $P(b, b, c, \dots, m) = P(c, \dots, m)$ und entsprechende zu ersetzen sein.) Für $n = 2$ nennt Verf. $P(a, b) = a \vee b \cup a^* b^* = a \sim b$ „alternanza“; er erwähnt nicht, daß diese Operation das Komplement zu der bekannten Ringsumme $a \oplus b = a \vee b \cup a^* b^* = D(a, b)$ ist und leitet die Rechenregeln für die alternanza ab. Die Abbildung b in $a \sim b$ wird als Involution mit dem Parameter a gedeutet und in diesem Sinne diskutiert.

H. Gericke.

Svoboda, František: Die unbestimmte zweiwertige Boolesche Funktion. Časopis Mat. 78, 373—375 (1953) [Tschechisch].

• Ehrlich, Gertrude: The structure of continuous rings. Thesis, University of Tennessee, 1953. VII, 81 p. (mimeographed).

An abstract of this thesis appeared in Bull. Amer. Math. Soc. 60, 138—139 (1954). The author considers a ring R , assumed to be the von Neumann regular ring of a projective or continuous geometry, and the group G consisting of the elements of R which possess inverses in R . She shows that elements of class 2 (i. e. $s = 1 + n$ with $n^2 = 0$) can be characterized within G and hence deduces the theorem: G_1 is

isomorphic to G_2 if and only if R_1 is either isomorphic or antiisomorphic to R_2 ; every isomorphism of G_1 onto G_2 is the product of an isomorphism induced by a unique isomorphism or anti-isomorphism of R_1 onto R_2 followed by a singular automorphism of G_2 . This generalizes in part the same theorems proved by R. Baer for the case R ring of linear mappings of a vector module (over a division ring) into itself. The present thesis follows Baer's methods [Linear algebra and projective geometry (this Zbl. 49, 381), Chap. VI] very closely but succeeds in putting the entire work in vector-free form, using theorems of von Neumann to supplement the machinery available from Baer's work. The author poses the problem of obtaining a treatment that applies both to Baer's case and to her case; actually, with minor modification, her treatment does include Baer's case.

I. Halperin (Math. Reviews 15, 930).

Ghika, Al.: Ensembles \mathcal{A} -convexes dans des \mathcal{A} -modules. Comun. Acad. Republ. popul. Române 2, 669—670, russ. und französ. Zusammenfassg. 670—671 (1952) [Rumänisch].

Ghika, Al.: Modules topologiques \mathcal{A} -localement convexes. Ibid. 3, 101—103, russ. und französ. Zusammenfassg. 102—103 (1953) [Rumänisch].

Ghika, Al.: Propriétés de la convexité dans certains modules. Ibid. 3, 355—360, russ. und französ. Zusammenfassg. 359—360 (1953) [Rumänisch].

Ghika, Al.: Modules topologiques localement convexes. Acad. Republ. popul. Române, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. 5, 49—73, russ. und französ. Zusammenfassg. 70—72 (1953) [Rumänisch].

Les premiers trois travaux sont contenus dans le quatrième. On considère un module E par rapport à un anneau \mathcal{A} qui contient un sous-anneau ordonné A . Une partie K de E est appelée convexe si $\alpha K + \beta K \subset (\alpha + \beta) K$ pour $\alpha, \beta \in A$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Plus loin on suppose que \mathcal{A} est commutatif, a un élément unité ε , est ordonné réticulé et satisfait aux conditions suivantes

- I. $\alpha + \sup(\beta, \gamma) = \sup(\alpha + \beta, \alpha + \gamma)$;
 II. $\alpha > 0$ implique $\alpha \sup(\beta, \gamma) = \sup(\alpha\beta, \alpha\gamma)$;
 III. $2\xi = 0$ implique $\xi = 0$; IV. $\xi^2 = 0$ implique $\xi = 0$.

Une application $\chi \rightarrow \chi$ de \mathcal{A} dans \mathcal{A} est appelée valeur absolue si

$$\chi + \beta \leq \chi + \beta, \quad \chi\beta = \chi|\beta|, \quad |\chi| = 0 \text{ équivaut à } \chi = 0, \quad |\varepsilon| = \varepsilon.$$

La valeur absolue est dite principale si $\chi = \sup(\chi, \chi)$. Une partie K de E est centrée si $\chi K = \chi K$ pour tout $\chi \in \mathcal{A}$ et \mathcal{A} -extensible si pour tout $x \in E$ il existe $\lambda \in \mathcal{A}$ tel que $x \in \lambda K$. Avec ces notions on considère des semi-normes à valeurs dans \mathcal{A} et on établit l'équivalence entre la topologie donnée par une famille de seminormes et une famille de voisinages fermés, \mathcal{A} -convexes, \mathcal{A} -centrés et \mathcal{A} -extensibles.

G. Marinescu.

Kaplansky, Irving: Dual modules over a valuation ring. I. Proc. Amer. math. Soc. 4, 213—219 (1953).

Es sei R ein vollständiger diskreter Bewertungsring, K sein Quotientenkörper und R_0 der R -Modul K/R . Ist dann M ein topologischer R -Modul, so wird der Dualmodul M^* als der Modul aller stetigen Homomorphismen von M in den mit der diskreten Topologie versehenen Modul R_0 definiert. Weiter besitze M ein aus Untermoduln bestehendes fundamentales Umgebungssystem der Null. Dann wird kein Element von M durch alle $f \in M^*$ annulliert. M und M^* bilden daher ein Paar dualer Moduln mit dem inneren Produkt $(x, f) = f(x)$. Ein Untermodul S von M ist genau dann topologisch abgeschlossen, wenn er folgende algebraische Abgeschlossenheitseigenschaft besitzt: Der Annulator des Annulators von S fällt mit S zusammen. M heißt linear kompakt, wenn jedes System von Kongruenzen $x \equiv a_i \pmod{S_i}$ mit abgeschlossenem Untermoduln S_i eine Lösung in M besitzt, sofern jedes endliche Teilsystem eine Lösung besitzt. Wenn M linear kompakt ist, so ist M genau dann

diskret, wenn es der Absteigenden-Ketten-Bedingung genügt. Außerdem gilt folgender Dualitätssatz: Wenn M linear kompakt ist, dann ist M topologisch und algebraisch zu dem zweifachen Dualmodul M^{**} isomorph, wenn M^{**} mit der durch M^* induzierten schwachen Topologie versehen wird. Dieser Satz wird auf zahlreiche Ergebnisse verschiedener Autoren angewandt und klärt deren gemeinsamen Hintergrund.

H.-J. Kowalsky.

Kowalsky, Hans-Joachim: Zur topologischen Kennzeichnung von Körpern. Math. Nachr. 9, 261—268 (1953).

Sei K ein lokal kompakter Schiefkörper und k der Primkörper in K . Ein Element $t \in K$ heißt analytisch nilpotent, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} t^n = 0$ ist. K enthält genau dann ein analytisch nilpotentes Element t , wenn K dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt. Verf. beweist weiter folgenden Satz: Besitzt K ein analytisch nilpotentes Element t , so erhält man die Topologie von K aus einer Bewertung mit reellen Werten und K hat endlichen Linksrang über der abgeschlossenen Hülle $k(t)$. Ist K zusammenhängend, so ist K gleich dem reellen, dem komplexen oder dem Quaternionen-Körper. In diesem Falle braucht die Stetigkeit der Division nicht vorausgesetzt zu werden. Ist K unzusammenhängend und 1. von der Charakteristik Null, so ist K eine endliche Schiefkörpererweiterung eines p -adischen Zahlkörpers. Hat 2. K Primzahlcharakteristik, so ist $k(t)$ Potenzreihenkörper in einer Unbestimmten mit Koeffizienten in k . — Dieser Satz enthält die Ergebnisse von Pontrjagin über die zusammenhängenden und von Jacobson über die total unzusammenhängenden Körper. Er ist inzwischen in die neue Auflage des Pontrjaginschen Buches über topologische Gruppen aufgenommen worden (Teil I. Kapitel IV der deutschen Ausgabe, s. dies. Zbl. 79, 39).

H. Leptin.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Iseki, Kaneshiroo: On a general divisor problem in algebraic number fields. Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 4, 1—21 (1953).

Im Falle des Kreisproblems gibt es eine bekannte Identität von Hardy und Landau. Ferner gibt es eine ebenfalls bekannte Identität von Hardy bezüglich der Anzahl der Gitterpunkte auf dem Kreise $u^2 + v^2 = n$. Verf. beabsichtigt nun, beide Identitäten zu verallgemeinern. Es sei k_j ($1 \leq j \leq \tau$) ein algebraischer Zahlkörper n_j -ten Grades, $\zeta_j(s)$ die Dedekindsche Zetafunktion von k_j und

$$Z(s) = \zeta_1(s) \cdots \zeta_\tau(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s} \quad (\sigma > 1).$$

Gesetzt sei $N = n_1 + \cdots + n_\tau > 2$, $v = [\frac{1}{2}N] + 1$, $\lambda = [\frac{1}{2}(N+1)]$. Ferner sei

$$K(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(4N)} g(s) \frac{w^{s+N}}{s \cdots (s+N)} ds \text{ mit } g(s) = \frac{Z(s)}{Z(1-s)}$$

und $Q_k(y) = H_k(y) - S^{(N-k)}(y) - y^k Z(0)/k!$ ($0 \leq k \leq N$)

mit $H_k(y) = \sum_{n \leq y} \frac{F(n)}{n^k} \quad (y > 0), \quad S(y) = \text{Res}_{s=1} \left(Z(s) \frac{y^{s-\lambda}}{s \cdots (s+N)} \right).$

Dann beweist Verf. für $x, y > 0$

$$\sum_{n \leq y} \frac{F(n)}{n^\lambda} K^{(v)}(nx) = Q_{\lambda-1}(x) - \int_y^\infty S^{(N+1)}(z) \frac{K^{(v)}(xz)}{z^\lambda} dz \\ + \sum_{l=0}^{\lambda} (-1)^l Q_l(y) \frac{\partial^l}{\partial y^l} \frac{K^{(v)}(xy)}{y^\lambda} + (-1)^\lambda \int_y^\infty Q_\lambda(z) \frac{\partial^{\lambda+1}}{\partial z^{\lambda+1}} \frac{K^{(v)}(xz)}{z^\lambda} dz,$$

was eine Verallgemeinerung der Hardy-Landauschen Identität ist. Verf. zeigt weiter.

daß für $x > 0$

$$Q_{x-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\lambda}} K^{(v)}(nx),$$

$$\begin{aligned} \text{d. h.} \quad \sum_{n \leq x} F(n) (x-n)^M &= \operatorname{Res}_{s=1} \left(Z(s) \frac{M! x^{s+M}}{s \cdots (s+M)} \right) + Z(0) x^M \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{M+1}} \frac{M!}{2\pi i} \int_{(1/2)} \frac{Z(s)}{Z(1-s)} \frac{(nx)^{s+M}}{s \cdots (s+M)} ds \end{aligned}$$

mit $M = \lfloor \frac{1}{2}(N-1) \rfloor$, was eine Verallgemeinerung der Hardyschen Identität ist.
Z. Suetuna.

Šafarevič, I. R.: Neuer Beweis des Kronecker-Weberschen Satzes. Trudy mat. Inst. Steklov. Nr. 38, 382—387 (1951) [Russisch].

Die Grundidee dieses höchst eleganten Beweises des Satzes, daß jeder absolut abelsche Körper in einem Kreisteilungskörper enthalten ist, besteht darin, daß der Satz zunächst mit Hilfe einiger altbekannter Hilfssätze lokal durch explizite Konstruktion bewiesen und dann mittels der Minkowskischen Diskriminantsätze, angewandt in der Form des Monodromie-Prinzips von Tschebotarew, auf den globalen Fall übertragen wird. Die Hilfssätze beziehen sich auf die Galoissche Struktur des zu einer p -ten Wurzel gehörigen Normalkörpers, auf die Frage nach der Einbettbarkeit eines quadratischen in einen zyklischen Körper 4. Grades und auf die p -adische Charakterisierung von p -ten Potenzen. — Im übrigen wird nicht irgendein absolut abelscher Körper betrachtet, sondern immer gleich das Kompositum aller absolut zyklischen Körper, deren Grad in einer gegebenen Primzahlpotenz aufgeht und deren Diskriminanten sich nur aus endlich vielen gegebenen Primzahlen zusammensetzen.
H. Reichardt.

Leopoldt, Heinrich W.: Zur Geschlechtertheorie in abelschen Zahlkörpern. Math. Nachr. 9, 351—362 (1953).

Es bezeichne P den rationalen Zahlkörper, K eine abelsche Erweiterung endlichen Grades von P mit dem Führer f . Verf. definiert zunächst das Artinsymbol (K/x) auch für Zahlen x , die zum Führer f teilerfremd sind, als den Automorphismus $\xi \mapsto \xi^{r(x)}$ für f -te Einheitswurzeln bzw. dessen „Spur“ in K , wo $r(x)$ der kleinste positive Rest von $x \bmod f$ ist. Durch diese erweiterte Definition erweisen sich die absolut abelschen Körper als den natürlichen Restklassengruppen \mathfrak{K} ganzer rationaler Zahlen in eindeutiger Weise zugeordnet. Für einen Charakter χ von \mathfrak{K} bildet man die Gaußsche Summe

$$\tau(\chi) = \sum_{x \bmod f_{\chi}} \chi(x) \exp \left(\frac{2\pi i x}{f_{\chi}} \right).$$

Hat die Gruppe \mathfrak{K} den Exponenten n , so wird der zugehörige Körper K über dem Körper P_n der n -ten Einheitswurzeln durch Adjunktion seiner sämtlichen Gaußschen Summen $\tau(\chi)$ erzeugt (Kummer-Erzeugung). Das Zerlegungsgesetz nimmt ferner die folgende Form an: Die Zerlegungs- und die Trägheitsgruppe eines Primteilers von p sind die dualen Gruppen zu den Gruppen aller Charaktere χ mit $\chi(p) \neq 0$ bzw. $\chi(p) = 1$. Einer Restklassengruppe \mathfrak{K} vom Führer $f = \prod_p p^{e_p}$ werden nun als p -Komponenten die durch \mathfrak{K} erzeugten Restklassengruppen $\mathfrak{K}_p \bmod p^{e_p}$ zugeordnet. Das direkte Produkt $\mathfrak{K}^* = \prod_p \mathfrak{K}_p$ wird die Auflösung von \mathfrak{K} genannt, i. a. eine echte Erweiterung von \mathfrak{K} . Der Hauptsatz über den Geschlechterkörper läßt sich nun so formulieren: Der größte über P abelsche und über K an allen endlichen Stellen unverzweigte Oberkörper K^* (der Geschlechterkörper) ist in obigem Sinne der Gruppe \mathfrak{K}^* zugeordnet. Nebenbei ergibt sich: die Verzweigungsordnung eines Primteilers von p in K ist gleich der Ordnung der p -Komponente von \mathfrak{K} .

Mit dieser Definition des Geschlechterkörpers gehört die des Hauptgeschlechts in einem zyklischen Körper K zusammen, nämlich die engste mod p_∞ erklärbare bei Automorphismen S von K invariante Klassengruppe von K . Die Klassen des Hauptgeschlechts sind leicht als $(1 - S)$ -te Potenzen erkennbar. Erwähnenswert ist noch der folgende für quadratische Zahlkörper längst bekannte Satz: ein zyklischer Körper K von Primzahlgrad besitzt dann und nur dann eine zu 1 prime Klassenzahl (im engeren Sinne), wenn er eine Primdiskriminante hat. *M. Eichler.*

Nakayama, Tadas: On a 3-cohomology class in class field theory and the relationship of algebra- and idèle-classes. Ann. of Math., II. Ser. 57, 1—14 (1953).

Verf. stellt und löst das folgende Problem: Sei K/k ein galoisscher Körper vom Grade m mit der Gruppe $\mathfrak{A} = \{\sigma, \tau, \dots\}$, $a(\sigma, \tau)$ Idealrepräsentanten eines kanonischen Idealklassenfaktorensystems $\mathfrak{a}(K/k)$ von K/k , $\partial a(\varrho, \sigma, \tau)$ ein zugehöriges kanonisches 3-Faktorensystem von \mathfrak{A} in K^\times ; ferner kann nach Teichmüller (dies. Zbl. 23, 198) jeder einfachen Algebra A vom Zentrum K , auf die alle Automorphismen aus \mathfrak{A} fortsetzbar sind, eindeutig eine 3-Kohomologieklass γ von \mathfrak{A} in K^\times zugeordnet werden. Für welche Algebren A stimmt γ mit der kanonischen Klasse von ∂a überein? Dies ist nach dem Hauptsatz der Arbeit genau dann der

Fall, wenn für die Hasse-Invarianten $\left(\frac{A}{\mathfrak{p}}\right)$ von A gilt: $\sum_{\mathfrak{p}} \frac{m'}{m\mathfrak{p}} \left(\frac{A}{\mathfrak{p}}\right) = -\frac{m'}{m} \pmod{1}$,

wobei $\sum_{\mathfrak{p}}$ über alle Primstellen \mathfrak{p} von k erstreckt ist, $m_{\mathfrak{p}}$ die \mathfrak{p} -Grade von K/k , m' ihr k. g. V. und \mathfrak{p} jeweils einen Primteiler von \mathfrak{p} in K bezeichnet. Zum Beweis wird einmal A als verschränktes Produkt über einem maximal-kommutativen, über k galoisschen Teilkörper $G|K$ dargestellt und das Teichmüller-Faktorensystem γ durch den zugehörigen 2-Kozyklus von A bez. G/K ausgedrückt; zum anderen, und hier liegt die über obiges Ergebnis hinausgehende Bedeutung der Arbeit, wird aus einem kanonischen Idealfaktorensystem a_0 eines zyklischen Körpers Z/k gleichen Grades m mit $Z \cap K = k$ vermöge des lift-Restriktionsprozesses von Hochschild-Nakayama (dies. Zbl. 47, 38) ein Idelrepräsentant a des kanonischen $\mathfrak{a}(K/k)$ explizit konstruiert. Verf. deutet noch an, wie sich sein Beweis nach einer Bemerkung von Hochschild vereinfachen läßt, und gibt eine Interpretation seines Resultates durch eine (erstmalig eingeführte) Idelgruppe der Algebra A . — Für eine verwandte, modifizierte Fragestellung vgl. eine zur gleichen Zeit erschienene Arbeit des Ref. (dies. Zbl. 48, 26), wo ein kanonisches Idelklassenfaktorensystem mit Hilfe von Arithmetik der Algebren ebenfalls direkt konstruiert wird.

W. Jehne.

Faddeev, D. K.: Einfache Algebren über einem Körper algebraischer Funktionen von einer Veränderlichen. Trudy mat. Inst. Steklov. Nr. 38, 321—344 (1951) [Russisch].

Vgl. die englische Übersetzung in Amer. math. Soc., Translat., II. Ser. 3, 15—38 (1956).

Iwasawa, Kenkichi: On the rings of valuation vectors. Ann. of Math., II. Ser. 57, 331—356 (1953).

Ein V -Ring ist ein topologischer Ring R mit folgenden Eigenschaften: 1. R ist ein halbeinfacher kommutativer Ring mit Einselement 1. 2. R ist lokalkompakt, aber weder kompakt noch diskret. 3. R hat einen die 1 enthaltenden Unterkörper K , der in R diskret ist und für den der Restklassenraum R/K kompakt ist. Im ersten Teil der Arbeit zeigt Verf., daß ein topologischer Ring R genau dann ein V -Ring ist, wenn R der Ring der Bewertungsvektoren ist über einem Körper K des folgenden Typus: K ist entweder ein algebraischer Zahlkörper oder ein algebraischer Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper. (Ref. bemerkt, daß dieser Sachverhalt eine nichtkommutative Verallgemeinerung zuläßt: Wenn man den Begriff der Bewertung für Algebren und den Ring R der Bewertungsvektoren über einer Algebra A in passender Weise definiert, so lassen sich diejenigen R , für die A ein-

fach ist und endlichen Rang über einem Körper K vom vorher beschriebenen Typ hat, in ganz entsprechender Weise topologisch charakterisieren. Dabei erweist sich die Einfachheit von A als von untergeordneter Bedeutung und kann auch noch fallengelassen werden). Zum Beweis, daß jeder V -Ring der Ring der Bewertungsvektoren ist über einem Körper vom vorher beschriebenen Typ, verwendet Verf. wesentlich den Begriff der Norm $N(\sigma, G)$ eines Automorphismus σ einer lokal kompakten Gruppe G . Dabei erhält man $N(\sigma, G)$ mittels eines linksinvarianten Haar-schen Maßes $\mu(E)$ von G durch $\mu(\sigma(E)) = N(\sigma, G) \mu(E)$. Die Norm hat folgende Eigenschaften: a) $N(\sigma_1 \sigma_2, G) = N(\sigma_1, G) \cdot N(\sigma_2, G)$, b) $N(\sigma, G) = N(\sigma, H) \cdot N(\sigma, G/H)$, wenn $\sigma H \subset H$, c) $N(\sigma, G) = 1$, wenn G kompakt oder diskret ist. Für einen lokal kompakten, die 1 enthaltenden Ring R ist durch $\sigma: a \rightarrow \xi a$ für ein reguläres Element ξ ein Automorphismus der Additivgruppe von R gegeben, welcher jedes Linksideal L von R invariant läßt. Die Normen $N(\sigma, R)$, $N(\sigma, L)$, $N(\sigma, R/L)$ werden mit $N(\xi, R)$, $N(\xi, L)$, $N(\xi, R/L)$ bezeichnet. Enthält R ein System $\{M\}$ von abgeschlossenen maximalen zweiseitigen Idealen M , deren Durchschnitt 0 ist, so gilt für reguläres ξ in R $N(\xi, R/M) = 1$ für fast alle M und $N(\xi, R) = \prod N(\xi, R/M)$, wobei das Produkt über alle M in $\{M\}$ läuft. Ist R ein V -Ring, so ist R/M ein in R isomorph enthaltener nichtdiskreter lokalkompakter Körper, und die Norm $N(\xi, R/M)$ liefert die „normierte“ Bewertung von R/M . Für $x \neq 0$ aus K ist wegen 3. $N(x, R) = 1$, so daß die durch $N(\xi, R/M)$ in K induzierten (nichttrivialen) Bewertungen der „Produktformel“ genügen. Hieraus folgt die Behauptung mit mehr oder weniger bekannten Methoden. — Schließlich zeigt Verf., daß sich die beiden Hauptsätze über die arithmetische Struktur von K direkt aus den topologischen Eigenschaften des V -Ringes R ableiten lassen. Der erste Satz besagt, daß R sich selbst dual ist, woraus ein Analogon des Riemann-Rochschen Satzes für algebraische Zahlkörper folgt. Ist χ ein nichttrivialer stetiger Charakter der Additivgruppe von R , der für K identisch verschwindet, so ist die Abbildung $\tau: r \rightarrow \chi_r(a) = \chi(r a)$ ein Isomorphismus von R auf seine Charaktergruppe $X(R)$, und es gilt $\chi(r a) = 0$ für jedes a aus K dann und nur dann, wenn r aus K ist. Für den ersten Teil der Behauptung wird gezeigt, daß der Kern des Homomorphismus τ ein kompaktes Ideal von R und daher 0 ist, da ein V -Ring keine kompakten Ideale außer 0 besitzt. Der zweite Satz sagt aus, daß die Gruppe der Idealklassen der Norm 1 kompakt ist, woraus die Endlichkeit der Klassenzahl und der Einheitensatz folgt. Die Idealegruppe J ist die multiplikative Gruppe der regulären Elemente von R . Sie ist lokal kompakt in bezug auf die Topologie, für die die Konvergenz einer Folge $\{a_i\}$ in K gleichbedeutend ist mit der Konvergenz von $\{a_i\}$ und $\{a_i^{-1}\}$ in der Topologie von R . Die Abbildung $a \rightarrow N(a, R)$ ist ein Homomorphismus von J mit dem Kern J_1 . Verf. beweist nun die Kompaktheit von J_1/K in ähnlicher Weise wie üblich, wobei er das Haarsche Maß verwendet. — Der Fall, daß K ein Funktionenkörper mit nichtendlichem Konstantenkörper ist, wird in der Arbeit mitbehandelt. Hierzu sind aber eine Reihe von Sonderbetrachtungen nötig. Insbesondere wird hierfür statt der Kompaktheit der Begriff der linearen Kompaktheit benutzt. H. Benz.

Zahlentheorie:

Popoviciu, Tiberiu: Sur la détermination par l'algorithme d'Euclid du p.g.c.d. de deux nombres. Acad. Republ. popul. Române, Fil. Cluj, Studii Cerc. şti. 4, Nr. 1/2, 59—62, russ. und französ. Zusammenfassg. 62—63 (1953) [Rumänisch].

En complétant un théorème, donné par P. L. Čebyšev, on démontre que le nombre N des divisions nécessaires à faire pour obtenir le p. g. c. d. de deux nombres naturels a, b ($a < b$) vérifie l'inégalité $N \leq 5A$, où A est le nombre des chiffres utilisés pour écrire a dans la base 11. On trouve que la base 11, dans un certain sens, est la meilleure.

D. Vaida.

Vrănceanu, G.: Sur une équation arithmétique. *Comun. Acad. Republ. popul. Române* 3, 5—8, russ. und französ. Zusammenfassg. 7—8 (1953) [Rumänisch].

Dans ce travail, on donne une nouvelle démonstration pour les résultats obtenus par D. Pompeiu [*Acad. Republ. popul. Române, Bul. ști., Sect. Ști. mat. fiz.* 4, 1—5 (1952)] relativement aux nombres N , jouissant de la propriété que N^2 se termine par les chiffres de N , donc satisfaisant à l'équation (1) $N^2 - N = A 10^n$, où n est le nombre des chiffres de N . On considère aussi une généralisation de (1), l'équation (2) $N^2 - kN = A 10^n$. Pour k impair, positif ou négatif et tel que $k \not\equiv 0 \pmod{5}$, l'équation (2) possède des solutions analogues à celles de (1). La parabole (2), où $n > 1$ et $k = \pm 1$ ou ± 3 , possède seulement deux points $P(N, A)$ et $P'(N', A')$, ayant comme coordonnées des nombres entiers et positifs d'une longueur $< n$. Si $n > 1$, $k \equiv 0 \pmod{2}$ et $k \not\equiv 0 \pmod{10}$, ou $k \equiv 1 \pmod{2}$ et $k \equiv 0 \pmod{5}$, l'équation (2) n'a pas de solutions, où N soit un nombre à n chiffres.

D. Vaida.

Brauer, Alfred: On a new class of Hadamard determinants. *Math. Z.* 58, 219—225 (1953).

Eine n -reihige Determinante, deren Elemente alle ± 1 sind, kann nach Hadamard höchstens den Wert $n^{n/2}$ haben. Für die Existenz einer Determinante mit diesem Maximalwert ist notwendig, daß n gleich 1 oder 2 oder durch 4 teilbar ist. Verf. fügt den bekannten hinreichenden Bedingungen (s. z. B. J. Williamson, dies. Zbl. 32, 245) eine weitere hinzu: $n = m^2$, wenn $m - 1$, $m + 1$ ein Primzahl-Zwillingspaar ist. Bei der Konstruktion wird ein Satz über das Jacobische quadratische Restsymbol verwendet (s. das folgende Referat).

M. Kneser.

Brauer, Alfred: On the distribution of the Jacobian symbols. *Math. Z.* 58, 226—231 (1953).

Für $i, k = 0, \pm 1$ sei M_{ik} die Anzahl der Restklassen $x \pmod{m}$, für welche die Jacobischen Symbole $\left(\frac{x}{m}\right) = i$, $\left(\frac{x+1}{m}\right) = k$ sind. Diese Anzahlen werden für ungerade quadratfreie m bestimmt, und zwar durch Induktion nach der Anzahl der Primfaktoren von m , unter Benutzung der Ergebnisse von E. Jacobsthal (Anwendung einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste, Diss. Berlin 1906) für den Fall von Primzahlmoduln. Das Ergebnis hat für $i, k = \pm 1$ die Gestalt $M_{ik} = \frac{1}{4}(A + a)$, wo $A = \prod_{p|m} (p-2)$ die Anzahl der Paare $x, x+1$ von aufeinander folgenden zu m primen Restklassen \pmod{m} ist, und das Zusatzglied a gleich ± 1 oder ± 3 ist und außer von i, k noch davon abhängt, ob die Anzahl der Primteiler $\equiv +1$ bzw. $\equiv -1 \pmod{4}$ von m gerade oder ungerade ist.

M. Kneser.

Vause, R. Z.: On the distribution of the Jacobian symbols. *J. Elisha Mitchell sci. Soc.* 72, 15—24 (1956).

Für $i, j, k = 0, \pm 1$ sei M_{ijk} die Anzahl der Restklassen $x \pmod{m}$, für welche die Jacobischen Symbole $\left(\frac{x}{m}\right) = i$, $\left(\frac{x+1}{m}\right) = j$, $\left(\frac{x+2}{m}\right) = k$ sind. Diese Anzahlen werden für ungerade quadratfreie m bestimmt. Ergebnisse und Beweise sind analog denen bei A. Brauer (s. vorstehendes Referat). Wie dort werden die entsprechenden Ergebnisse von E. Jacobsthal (Anwendung einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste, Diss. Berlin 1906) für Primzahlmoduln benutzt.

M. Kneser.

Popoviciu, Tiberiu: Sur un problème de partition des nombres. *Acad. Republ. popul. Române, Fil. Cluj, Studii Cerc. ști.* 4, Nr. 1/2, 7—57, russ. und französ. Zusammenfassg. 57—58 (1953) [Rumänisch].

L'A. examine quelques problèmes concernant le nombre $N_m(n)$ des solutions en entiers non-négatifs de l'équation (1) $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m = n$, où a_1, a_2, \dots, a_m sont des nombres naturels données. Surtout l'on considère le problème suivant: Etant donnée l'équation (1), déterminer un polynome $P(n)$ de manière que $N_m(n)$ soit égal à l'entier le plus rapproché de $P(n)$ quel que soit n . Le problème a

été considéré dans certains cas particuliers par J. J. Sylvester et Th. Skolem. Dans ce travail on donne une solution complète pour les cas $m = 2$ et $m = 3$ et l'on démontre que le problème n'a pas de solutions si $m \leq 5$ et $a_i = 1$, $i = 1, 2, \dots$. Les méthodes utilisées ont un caractère élémentaire et sont fondées sur des considérations arithmétiques simples.

D. Vaida.

Rieger, Georg Johann: Zur Hilbertschen Lösung des Waring'schen Problems: Abschätzung von $g(n)$. Mitt. math. Sem. Gießen 44, 37 S. (1953).

Rieger, G. J.: Zur Hilbertschen Lösung des Waring'schen Problems: Abschätzung von $g(n)$. Arch. der Math. 4, 275—281 (1953).

Es bedeute $g(n)$ bzw. $G(n)$ die kleinste Zahl derart, daß sich jede bzw. jede genügend große natürliche Zahl als Summe von höchstens $g(n)$ bzw. $G(n)$ n -ten Potenzen darstellen läßt. Hilbert hat angedeutet, daß sein Beweisverfahren für die Waring'sche Vermutung auch zur expliziten Bestimmung einer oberen Schranke für $g(n)$ ausgebaut werden könne. Während das bisher vielfach bezweifelte wurde, gelingt dem Verf. auf diesem Wege die Abschätzung $g(n) \leq (2n+1)^{260(n+3)^{3n+8}}$. Diese ist zwar grober als die früher von Hardy und Littlewood und anderen mit ihren analytischen Beweismethoden erhaltenen Abschätzungen von $G(n)$, wird aber auf völlig elementare Weise gewonnen. Dabei wird die Hauptschwierigkeit, die Abschätzung der Zahlennenner in der Hilbertschen Identität, durch Zugrundelegung des Beweises von Stridsberg [Arkiv Mat., Astron., Fys. 11, Nr. 25 (1916—17)] überwunden. Die zweite Arbeit stellt einen Auszug der ersten dar.

H. Orsinger.

Rieger, G. J.: Zu Linniks Lösung des Waring'schen Problems: Abschätzung von $g(n)$. Math. Z. 60, 213—234 (1954).

Durch konstruktive Wendung, Verallgemeinerung und Abschätzung der Konstanten des an entscheidender Stelle indirekten Linnik'schen Beweises [Mat. Sbornik, n. Ser. 12 (54), 225—230 (1943); vgl. Chintschin, dies. Zbl. 42, 40] des Waring-Hilbert'schen Satzes gewinnt Verf. auf elementarem Wege einen sehr allgemeinen Satz über die Anzahl der bei Zerfällungen von verallgemeinertem Waring'schen Typ nötigen Summanden, der unter anderem folgendes Ergebnis enthält: Es sei $f(x) = \sum_{v=0}^n a_v x^v - x$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, $a_0 > 0$, $f(x) > 0$ für ganzes $x > 0$. Durchläuft dann x_1 eine Folge natürlicher Zahlen von der Dichte $\delta > 0$, so bildet die Folge $\{0, 1, f(x_1)\}$ eine Basis der natürlichen Zahlen von der Ordnung

$$g(n, f, \delta) < (2^{22} n^2 \max |a_v|^{3/2} \delta^{2n})^{16n-1} (n-1)!.$$

Insbesondere ergeben sich für die Fälle $f(x) = x^n$ bzw. $\delta = 1$ elementare Beweise der Schnirelmann'schen bzw. Kamkeschen Verallgemeinerung des Waring-Hilbert'schen Satzes und erstmals obere Abschätzungen des zugehörigen $g(n, x^n, \delta)$ bzw. $g(n, f, 1)$. Die Schnirelmann'sche Verallgemeinerung hat Verf. (dies. Zbl. 51, 32) bereits früher auf diesem Wege bewiesen, und für die Kamkesche hat Hua [J. Chinese math. Soc. 2, 175—191 (1940)] auf analytischem Wege eine scharfe Abschätzung der asymptotischen Basisordnung $G(n, f, 1)$ erhalten. Setzt man gleichzeitig $f(x) = x^n$ und $\delta = 1$, so ergibt sich zum ursprünglichen Waring-Hilbert'schen Satz die Abschätzung $g(n) = g(n, x^n, 1) \leq 4^{16n(n+1)!}$. Diese ist schärfer als die früher vom Verf. nach der Hilbert'schen Methode elementar gewonnene, wenn auch gröber als die von Hardy und Littlewood und anderen mit analytischen Methoden erhaltenen Abschätzungen von $G(n)$ (vgl. vorstehendes Referat).

H. Orsinger.

Nečaev, V. I.: Das Waring'sche Problem für Polynome. Trudy mat. Inst. Steklov. Nr. 38, 190—243 (1951) [Russisch].

Vgl. die Besprechung der englischen Übersetzung in diesem Zbl. 71, 40.

Carlitz, L.: Some sums analogous to Dedekind sums. Duke math. J. 20, 161—171 (1953).

Let $S(h, k)$ denote the Dedekind sum

$$S(h, k) = \sum_{\mu \pmod{k}} \left(\left(\frac{\mu}{k} \right) \right) \left(\left(\frac{\mu h}{k} \right) \right), \quad (h, k) = 1, \quad k > 0$$

where for any real number x , $((x)) = 0$ or $x - [x] - \frac{1}{2}$ according as x is or is not an integer. $S(h, k)$ satisfies the reciprocity formula

$$12hk \{S(h, k) + S(k, h)\} = h^2 + 3hk + k^2 + 1.$$

The author proved this formula (this Zbl. 57, 37) using the following representation for $S(h, k)$ namely

$$(*) \quad S(h, k) = \frac{1}{4k} + \frac{1}{k} \sum_{\varrho \neq 1} (\varrho^{-1} - 1) (\varrho^h - 1)^{-1}$$

where the summation runs through all the k -th roots of unity $\varrho = 1$. In this paper the author obtains generalizations of the reciprocity formula by defining analogues of $S(h, h)$ in $GF(q, x)$ the field of rational functions in one variable x over a finite field of q elements by using (*) as the definition for $S(h, k)$ over the field of rational numbers. A typical formula is the following: Let for any primary polynomial M in $GF(q, x)$ of degree m , $\omega_M(n)$ be the polynomial defined by the author (this Zbl.

32, 3). Put $\delta_r(H, K) = \sum_{\beta \neq 1} \beta^{r+1} \omega_H(\beta)$ the sum extended over all $\beta \neq 0$ satisfying $\omega_K(\beta) = 0$. Then

$$H \delta_{1-q}(H, K) + K \delta_{1-q}(K, H) = (H^{q-1} K^{q-1} - 2)/(x^q - x).$$

K. G. Ramanathan.

● Borel, Émile: Les nombres premiers. (Que sais-je? No. 571.) Paris: Presses Universitaires de France 1953. 133 p.

Eine für einen weiten Leserkreis mit bescheidensten Vorkenntnissen bestimmte Einführung in einige einfache Grundgedanken der elementaren Zahlentheorie unter besonderer Berücksichtigung der Primzahlen: Teilbarkeit, Primzahlen, Primzahltafeln, Kongruenzen und quadratische Reste, Sätze von Fermat und Wilson, Quadratsummen, ganze Gaußsche Zahlen, feste Teiler der Werte eines Polynoms. Im Anhang skizzenhaft heuristische Überlegungen zum Primzahlsatz. Durch empirisches Zahlenmaterial veranschaulichte Unregelmäßigkeiten der Primzahlverteilung werden durch Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen plausibel gemacht, wobei der Leser bis zu offenen Fragen gelangt.

H. Orsinger.

● Trost, Ernst: Primzahlen. (Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt aus. II.) Basel/Stuttgart: Verlag Birkhäuser 1953. 95 S. SFr. 13.50.

Mit diesem Bändchen liegt eine in sich abgeschlossene Einführung in die elementare Primzahltheorie vom modernsten Standpunkt vor. Verf. leitet nicht nur die Hauptergebnisse her, gipfend im elementaren Beweis des Primzahlsatzes, sondern entwickelt auch eine ganze Reihe schöner Einzelresultate (besonders in Abschnitt III und IV), die man sonst wohl nur verstreut findet, und berichtet außerdem über weitere interessante gelöste und ungelöste Probleme. Andererseits werden sogar die benötigten zahlentheoretischen Hilfsmittel in den ersten Abschnitten entwickelt und an Vorkenntnissen nur einfache Tatsachen aus der Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt. Daher kann der Band, entsprechend der Zielsetzung der Reihe, auch einem fernerstehenden, ernsthaft mitarbeitenden Leser einen gründlichen Einblick in das behandelte Gebiet vermitteln. Die Unterbringung der großen Stofffülle auf knappem Raum gelingt Verf. mit Hilfe einer besonders prägnanten Art der Darstellung. Störend macht sich diese Kürze nur da bemerkbar, wo sich eines der relativ zahlreichen Verschen, von mühelos behebbar bis zu größeren, eingeschlichen hat. Jeweils ein Beispiel: In Satz 1 fehlt die Voraussetzung $n > 1$. Bei Satz 11 wird die Teilaussage mit „dann“ in einer irrigen Fassung gebracht, die sich schon bei Euler (Opera omnia, Ser. 1, 2, 314) findet und seither von mehreren Autoren wieder-

gegeben worden ist. Gegenbeispiele: $m = 6, 31$. Was richtig und von Euler, dagegen nicht beim Verf., tatsächlich bewiesen ist, ergibt sich bei Euler aus dem nachfolgenden Korollar 2: Eine Zahl der Form $4m + 1$ ist dann (und nur dann) Primzahl, wenn sie auf genau eine Weise als Summe von zwei Quadraten darstellbar ist und diese Quadrate teilerfremd sind. Ähnliches gilt für Satz 12—14. Diese in einer Neuauflage leicht zu ändernden Stellen beeinträchtigen jedoch nicht die glückliche Gesamtkonzeption des Werkes. - Inhalt: I. Grundlagen und erste Übersicht, II. Zahlentheoretische Funktionen, III. Allgemeine Primzahlkriterien (u. a. Primzahldarstellung durch quadratische Formen, Fragen der Praxis), IV. Spezielle Primzahlen (u. a. primzahlwertige Funktionen), V. Primzahlsummen, VI. Allgemeine Aussagen über $\pi(x)$ und p_x , VII. Elementarer Beweis des Primzahlsatzes (Modifikation des konstruktiven Beweises von A. Selberg, dies. Zbl. 36, 306), VIII. Elementarer Beweis des Satzes über die arithmetische Progression (nach H. N. Shapiro, dies. Zbl. 37, 168), IX. Siebmethode (u. a. Primzahlzwillinge), X. Goldbachsche Vermutung (Schnirelmannscher Satz).
H. Orsinger.

Mařík, Jan: Über quadratische Polynome, die viele Primzahlwerte annehmen. Časopis Mat. 78, 57—58 (1953) [Tschechisch].

Goluběv, V. A.: Eine Verallgemeinerung der Funktionen $\varphi(n)$ und $\pi(x)$. Časopis Mat. 78, 47—48 (1953) [Tschechisch].

Sanielevici, S.: La décomposition d'un nombre entier en une somme de deux carrés. Acad. Republ. popul. Române, Bul. şti. Sect. Şti. mat. fiz. 5, 5—18, russ. und französ. Zusammenfassg. 18 (1953) [Rumänisch].

On rappelle d'abord que si $mh = a^2 + b^2$ et $(a, b) = 1$, alors $mk = 1 + c^2$ et si $mh = 1 + c^2$, alors $m = a^2 + b^2$. À l'aide de cette proposition et d'autres on établit quelques propriétés relatives à la décomposition d'un nombre entier en une somme de deux carrés et on donne une méthode, valable pour tout nombre impair, pour arriver à une telle décomposition. Les résultats sont appliqués au problème de la représentation du discriminant D d'une équation quadratique normée. L'élément de discussion est constitué par une certaine propriété de métasymétrie de la période simple, mise en évidence par le développement en fraction continue de la racine positive.
D. Vaida.

Sanielevici, S.: Sur les formes $x^2 + Ay^2$. Acad. Republ. popul. Române, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. 5, 337—347, russ. und französ. Zusammenfassg. 347 (1953) [Rumänisch].

Par des considérations élémentaires, faisant usage de la condition nécessaire et suffisante bien connue pour qu'un entier rationnel soit résidu quadratique mod p , l'A. trouve les résultats suivants: (I) tout nombre impair, dont les facteurs premiers ont la forme $14f + 1$, $14f + 19$ ou $14f + 11$ peut être représenté par la forme $x^2 + 7y^2$ et (II) les nombres premiers p qui vérifient la congruence $c^2 + A \equiv 0 \pmod{p}$ où $A = 7, 11, 19, 43, 67$ et 163 peuvent être soit de la forme $x^2 + Ay^2$, soit de la forme $\frac{1}{4}(x^2 + Ay^2)$, x et y étant impairs. On donne aussi des conséquences pour la divisibilité dans quelques anneaux d'entiers algébriques, démontrant par exemple que tout nombre $a + b\sqrt{-7}$, où $a + b \equiv 1 \pmod{2}$ se décompose en produit de facteurs premiers de la même forme d'une seule manière.
D. Vaida.

Mahler, K.: On the approximation of π . Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 30—42 (1953).

In dieser schönen Arbeit wird der verblüffende Satz gezeigt: Sind p und $q \geq 2$ ganze positive Zahlen, so ist $|\pi - p/q| > q^{-12}$. Der Beweis benutzt einen Hilfssatz aus der Arbeit des gleichen Verf. (dies. Zbl. 52, 44). Als Verallgemeinerung des obigen Satzes wird für die Approximation von π durch algebraische Zahlen ω bewiesen: Bezeichne R den Körper der rationalen Zahlen, falls ω reell, und den Gausschen Körper, falls ω nicht reell ist. r bezeichne den Grad von ω über R und es sei $a_0 z^r +$

$a_1 z^{r-1} + \dots + a_r = 0$ ($a_0 \neq 0$) eine in R irreduzible Gleichung mit ganzen Koeffizienten aus R für ω . Mit $a = \text{Max}(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_r|)$, $m = [20 \cdot 2^{5(r-1)/2}]$, $\tilde{a} = \text{Max}(a, (m+1)^{(m+1)^{1/r}})$ folgt dann $|\pi - \omega| > \left(\frac{m+1}{e}\right)^{-(m+1)} \tilde{a}^{-(m+1)^{1/r} \log(m+1)}$.

Dieses Resultat ist für $a \geq (m+1)^{(m+1)^{1/r}}$ schärfer als ein entsprechender Satz von Feldman (dies. Zbl. 42, 48) und gibt darüber hinaus eine untere Schranke für $|\pi - \omega|$, die frei ist von unbekannten Konstanten. *Th. Schneider.*

Korobov, N. M.: Die Bruchteile von Exponentialfunktionen. Trudy mat. Inst. Steklov. Nr. 38, 87—96 (1951) Russisch].

The author studies the uniform distribution (mod 1) of expressions αq^x and $\alpha f(x)q^x$ ($x = 1, 2, 3, \dots$) where $q \geq 2$ is an integer, $f(x)$ a polynomial with integral coefficients, and α runs over certain real numbers defined in the form of series. Compare his later work, this Zbl. 50, 73; 51, 286. *K. Mahler.*

Churchhouse, R. F.: A criterion for irrationality. Canadian J. Math. 5, 253—260 (1953).

Mit Hilfe eines Lemmas von Legendre über Irrationalität unendlicher Kettenbrüche wird folgendes Irrationalitätskriterium hergeleitet: Sei $\psi(n)$ eine positive, ganzwertige echt wachsende Funktion von n . Ferner $F(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p$.

$G(x) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p x^p$, wobei a_p die Anzahl der Partitionen von p in der Form $p = \psi(m_1) + \psi(m_2) + \dots + \psi(m_k)$; $m_k > m_{k-1} > \dots > m_1 = 1$; $m_{i+1} - m_i \geq 2$; und $b_0 = 1$ und b_p für $p \geq 1$ die Anzahl der Partitionen von p in der Form $p = \psi(m_1) + \psi(m_2) + \dots + \psi(m_k)$; $m_k > m_{k-1} > \dots > m_1 \geq 2$; $m_{i+1} - m_i \geq 2$ bedeute.

Sei $\gamma = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \psi(n-r)$. Dann ist für teilerfremde ganze Zahlen r, s mit $r < s^2$ die Zahl $H(r/s) = F(r/s) G(r/s)$ irrational. Der Beweis ist überraschend einfach. Von dem Kriterium werden mehrere Anwendungen auf Irrationalitätsaussagen gemacht, u. a., daß für $\psi(n) = 2^{n-1}$ und $r^3 = s^2$ wenigstens eine der Zahlen $G(r/s)$, $G(r^2/s^3)$ irrational ist. *Th. Schneider.*

LeVeque, W. J.: On Mahler's U -numbers. J. London math. Soc. 28, 220—229 (1953).

Wir nennen die Folge der Polynome $f_n(x) = a_0^{(n)} + \dots + a_m^{(n)} x^m$ ($n = 1, 2, \dots$) festen Grades m und der Höhe $H(f_n) = \text{Max}(|a_0^{(n)}|, \dots, |a_m^{(n)}|)$ eine Folge von Liouville-Polynomen (L_m -Folge) für ξ , wenn $H(f_1) \leq H(f_2) \leq \dots$ und $0 < |f_n(\xi)| \leq H^{-\omega_n}(f_n) < 1$ ($n = 1, 2, \dots$) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty$ erfüllt ist. Wir bezeichnen mit

U_m die Menge aller ξ , für die eine L_m -Folge, aber keine L_{m-1} -Folge existiert. Dabei ist U_1 die Menge der Liouville-Zahlen. Es wird gezeigt, daß U_m für kein $m \geq 1$ leer ist. Ferner wird als notwendige Bedingung dafür, daß ξ zu U_m gehört, bewiesen, daß nur endlich viele Elemente irgendeiner L_m -Folge für ξ reduzibel sind. Unter den weiteren Resultaten sei noch der folgende Transzendenzsatz genannt: Wenn die Folge der $\{f_n(x)\}$ eine L_m -Folge ist für jede der verschiedenen Zahlen ξ_1, \dots, ξ_m , und es existieren Zahlen $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ derart, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} a_k^{(n)} / a_m^{(n)} = \lambda_k$ ($k = 0, \dots, m-1$)

ist, so sind diese entweder Liouville-Zahlen oder rational und wenigstens eine ist Liouville-Zahl. Ist λ_k rational, dann ist für großes n stets $a_k^{(n)} / a_m^{(n)} = \lambda_k$, während wenn $\lambda_k \in U_1$ ist, $a_k^{(n)} / a_m^{(n)}$ gegen λ_k konvergiert für großes n . Schließlich ist die monotone Vereinigungsfolge der reduzierten Nenner $\{q^{(n)}\}$ eine Lückenfolge, z. B. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \log q^{(n+1)} / \log q^{(n)} = \infty$. *Th. Schneider.*

Bredichin, B. M.: Über die Charaktere von Halbgruppen aus Zahlen mit genügend dünner Basis. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 707—710 (1953) [Russisch].

G sei eine multiplikative Halbgruppe reeller Zahlen ≥ 1 mit unendlicher Basis $\omega_1, \omega_2, \dots$ ($\omega_i > 1$ für alle i). $\pi(x)$ sei die Anzahl der $\omega_i \leq x$ und $\pi(x) \rightarrow \infty$ bei $x \rightarrow \infty$. $\chi(\alpha)$ sei ein Charakter von G : $\chi(\alpha) = 1$, $\chi(\alpha\beta) = \chi(\alpha)\chi(\beta)$ für $\alpha, \beta \in G$ und $H(x) = \sum_{\alpha \leq x} \chi(\alpha) \cdot \log_{\alpha} x$ und $\epsilon_m(x)$ bezeichnen die m -fache Iteration von $\log x$ und e^x . Verf. zeigt: Ist $\pi(x) = O(\log x)$ und für ein k $\chi(\omega_k) = 1$, so gilt $H(x) = O(x^\mu)$ ($0 < \mu < 1$). Falls alle $\chi(\omega_i) = 1$ und zwei Basiselemente ω_i und ω_j existieren, daß der Kettenbruch $\log \omega_i / \log \omega_j = [a_0, a_1, \dots]$ die Eigenschaft $a_i = O(\epsilon_m(x))$ und für die Nenner der Näherungsbrüche $q_{i-1} = O(e^{q_i^{\frac{1}{m}}})$, $0 < \mu < 1$, hat, so folgt mit $\pi(x) = O(\log_{m-1} x)$ $H(x) = O((\log_m x)^\mu)$, $0 < \mu < \frac{1}{2}$.

H.-E. Richert.

Bredichin, B. M.: Über die summatorischen Funktionen der Charaktere von numerischen Halbgruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 94, 609—612 (1954) [Russisch].

$\chi(\alpha)$ sei Charakter einer Halbgruppe reeller Zahlen $\alpha \geq 1$ mit endlicher Basis $\omega_1, \dots, \omega_s$ ($\omega_i > 1$, $N > 1$). $M_{k,l}(x)$ bezeichne die Anzahl der Näherungsbrüche von $\log \omega_i / \log \omega_j$ ($k \neq l$) mit Nennern in $[0, x]$. Dann ist

$$\max_{x \in [0, \xi]} H(x) \gg \sqrt{\max_{k,l} M_{k,l}} (\sqrt{\xi} \log^{-3/2} \xi).$$

Dies bestätigt eine Vermutung von A. O. Gelfond. Die Beweise sind, wie auch in der vorstehend besprochenen Arbeit, vornehmlich analytisch und benutzten Methoden von Čudakov-Pavljučuk (dies. Zbl. 49 313).

H.-E. Richert.

Analysis.

Mengenlehre:

Kurepa, G.: Généralisation de l'opération de Suslin, de celle d'Alexandroff et de la formule de de Morgan. Rad Jugoslav. Akad. Znanost. Umjetnost. 292, 233—249 (1953) [Serbo-kroatisch], franzos. Fassung in Bull. internat. Acad. Yougoslave Sci. Beaux-Arts, n. Sér. 13, 96—107.

Es sei S eine (teilweise) geordnete Menge, in Zeichen $(S; \leq)$, und $O(S)$ das System der (nicht leeren) total-geordneten maximalen Teilmengen von $(S; \leq)$, ferner $O'(S)$ das System der anti-geordneten maximalen Teilmengen A von $(S; \leq)$ derart, daß $A \cap M \neq \emptyset$ für jedes $M \in O(S)$; dabei heißt A antigeordnete Teilmengen von $(S; \leq)$, wenn A keine zwei vergleichbaren (verschiedenen) Elemente aus S enthält. — Es sei f eine eindeutige Abbildung von S in einen Mengenvollverband. Als Suslinsche Operation bzw. als Alexandroffsche Operation bezüglich S, f wird bezeichnet die Bildung von $\bigcup_{M \in O(S)} \bigcap_{x \in M} f(x)$ bzw. von $\bigcup_{A \in O'(S)} \bigcap_{t \in A} C f(t)$; dabei ist die Komplementbildung C bezogen auf eine beliebige Teilmenge E von $\bigcup_{x \in S} f(x)$.

Es werden folgende Relationen bewiesen: (I) Für beliebiges $(S; \leq)$ und f gilt

$$C \bigcup_{M \in O(S)} \bigcap_{x \in M} f(x) \supseteq \bigcup_{A \in O'(S)} \bigcap_{t \in A} C f(t)$$

und

$$\bigcap_{M \in O(S)} \bigcup_{x \in M} C f(x) \supseteq \bigcup_{A \in O'(S)} \bigcap_{t \in A} C f(t);$$

ferner gelten die dualen Formeln. Dabei kann schon bei nur 5 Elementen enthaltenem S der Fall eintreten, daß die Gleichheitszeichen nicht gelten. — Hingegen gelten in allen vier Formeln die Gleichheitszeichen, wenn $O(S) = \{S\}$, also $O'(S) = \{x\}$ ($x \in S$), oder wenn $O'(S) = \{S\}$, also $O(S) = \{x\}$, oder wenn eine etwas kompliziertere Bedingung erfüllt ist.

Otto Haupt.

Novák, Josef: On some problems of Luzin concerning the subsets of natural numbers. Czechosl. math. J. 3 (78), 385—393 und engl. Zusammenfassg. 393—395 (1953) [Russisch].

Es sei R die Menge aller natürlichen Zahlen, und es sei $E \subset R$, $F \subset R$. Nach Lusin nennt man E und F orthogonal zueinander, wenn $E \cap F$ endlich ist. Das Symbol $E < F$ bedeutet, daß $E \setminus F$ endlich ist. Eine (transfinite) Folge $E_0 < E_1 < \dots < E_\lambda < \dots$ mit $E_\lambda \subset R$ heißt streng zunehmend, wenn $E_\beta \setminus E_\alpha$ für $\beta > \alpha$ stets unendlich ist. Ist \mathfrak{M} ein System von Mengen $M \subset R$, so heiße $H \subset R$ eine Hülle von \mathfrak{M} , wenn $M < H$ für jedes $M \in \mathfrak{M}$ gilt. Zwei Systeme \mathfrak{M} und \mathfrak{N} heißen voneinander getrennt, wenn für sie zwei elementenfremde Hüllen existieren, und sie heißen orthogonal, wenn jede Menge $M \in \mathfrak{M}$ zu jeder Menge $N \in \mathfrak{N}$ orthogonal ist. Von Lusin stammen dann folgende Desiderata: I. Gibt es ein abzählbares System \mathfrak{M} und ein System \mathfrak{N} von der Mächtigkeit \aleph_1 , die beide zueinander orthogonal sind, sich aber nicht trennen lassen? — II. Gibt es in R zwei zueinander orthogonale streng zunehmende Folgen $\{E_n\}$ und $\{F_\lambda\}$ mit $n < \omega$, $\lambda < \omega_1$, die sich nicht trennen lassen? — III. Gibt es in R zwei streng zunehmende Folgen $\{E_\lambda\}$ und $\{F_\lambda\}$ mit $\lambda < \omega_1$, für welche eine und nur eine gemeinsame Hülle existiert, wobei zwei Hüllen, die sich nur durch eine endliche Anzahl von Elementen unterscheiden, als gleich angesehen werden? — IV. Gibt es in R eine streng abnehmende Folge $\{E_\lambda\}$ mit $\lambda < \omega_1$, für welche aus $E_\lambda < E$ (für jeden Wert $\lambda < \omega_1$) folgt, daß E endlich ist? — Nachdem W. Sierpiński IV auf der Grundlage der Kontinuum-Hypothese im positiven Sinne beantwortet hatte, (dies. Zbl. 31, 385), beantwortet Verf. alle vier Fragen im positiven Sinne, und zwar I und II auf der Grundlage der Kontinuumhypothese, III und IV auf der schwächeren Hypothese $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$.
K. Bögel.

Novikov, P. S.: Über die Widerspruchsfreiheit einiger Sätze der deskriptiven Mengenlehre. Trudy mat. Inst. Steklov. Nr. 38, 279—316 (1951) [Russisch].

In 1938 Gödel announced (cf. this Zbl. 20, 297) that if the other axioms of set theory are consistent then this consistency is not destroyed by adding simultaneously the following axioms: 1. the axiom of choice, 2. the generalized continuum hypothesis, 3. the existence of linear non-measurable B_2 sets, 4. the existence of linear CA sets which are of the power of the continuum and contain no perfect subsets. He said the proof consisted of constructing a model \mathcal{I} satisfying the augmented set of axioms. In later publications (cf. this Zbl. 21, 1: "The Consistency of the Continuum Hypothesis", Princeton 1940) he gave full details of the construction of \mathcal{I} and a proof that it satisfied 1., 2., but made no further mention of 3., 4. In this paper the author proves that \mathcal{I} satisfies 3., 4. and 5.: there exists a function of class A_2 defined at all points of the Baire space I and discontinuous on every perfect set. [In fact 3., 4. follow easily from 5.]. He points out that his construction of these sets and functions uses only the ordinary procedures of set-theory; it is only in the proof that they satisfy the conditions that he needs to use the fact that in \mathcal{I} every set is "constructible". He states some further consistency results concerning the separation of sets A_n for sufficiently large n , which he says will be proved in a later paper.

J. C. Shepherdson.

Ljapunov, A. A.: R -Mengen. Trudy mat. Inst. Steklov 40, 68 S. (1953) [Russisch].

The paper constitutes the author's Thesis (Moscow, 1949). Some results were previously announced and the others were subsequently developed and published (cf. this Zbl. 50, 55; 51, 291). The main idea is to find more general classes in which the methods and theorems concerning B , A , CA -sets should still hold; in particular one studies systematically the Kolmogoroff's R -operation [cf. Kantorovitch-Livenson, Fundamenta Math. 18, 214—279; 20, 54—97 (this Zbl. 4, 294; 7, 241), in particular pp. 82—97 of the second paper]. The study consists of Introduction (3—6 p.) and the following 5 chapters: R -operations (7—16), Principle of comparison of indexes (17—32), R -sets (33—41), Construction of measurable sets (42—52), T -operation with constant basis (53—58) and δ -operations leaving invariant the measurability and the Baire's property [B. p.]. Let N be a system of infinite sequences of integers; for a given sequence E_n of sets one defines the operations:

$$\Phi_N(\{E_n\}) = \bigcup_{\eta \in N} \bigcap_{n \in \eta} E_n, \quad \psi_N(\{E_n\}) = \bigcup_{\eta \in N} \bigcap_{n \in \eta} E_n \cap \bigcap_{m \in \eta} C E_m,$$

$$\varphi_N(\{E_n\}) = C \psi_N(\{C E_n\}).$$

As a particular case one has the Kolmogoroff's R -operation. Let $\mathfrak{N} = \{N_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$

from the case of measurability of S implied in the inner properties of S . Descriptively measurable sets are measurable relative to each measure defined in B -sets, are topologically invariant, have the Baire property, etc. G. Kurepa.

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

● Bajesay, Pál: **Functions of several variables and their differentiation.** (Technical Mathematical Exercises A. VI.) Budapest: Tankönyvkiadó 1953. 97 p. 15.— Ft. [Ungarisch].

● Bajesay, Pál: **Integration of functions of several variables.** (Technical Mathematical Exercises A. VII.) Budapest: Tankönyvkiadó 1953. 105 p. 14.50 Ft. [Ungarisch].

● Fazekas, Ferenc: **Indefinite integrals.** (Technical Mathematical Exercises A. IV.) Budapest: Tankönyvkiadó 1953. 203 p. 28.— Ft. [Ungarisch].

Marcus, S.: **La continuité approximative qualitative.** (Commun. Acad. Republ. popul. Române 3, 117—120, russ. und französ. Zusammenfassg. 119—120 (1953) [Rumänisch].

Marcus, S.: **La dérivée approximative qualitative.** Ibid. 3, 361—364, russ. und französ. Zusammenfassg. 363—364 (1953) [Rumänisch].

Marcus, S.: **La limite approximative qualitative.** Ibid. 3, 9—12, russ. und französ. Zusammenfassg. 11—12 (1953) [Rumänisch].

Ces Notes ont été développées (avec démonstrations) par l'A. dans son mémoire „Contribution à une analyse des fonctions réelles basée sur la notion de catégorie (au sens de Baire), publié dans Acad. Republ. popul. Roumne, Studii Cerc. mat. 7, Nr. 3—4, 251—272 (1956). A. Froda.

Greco, Donato: **Criteri di compattezza per insiemi di funzioni in n variabili indipendenti.** Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 121—124 (1953).

L'A. comunica i teoremi dimostrati nella nota con lo stesso titolo pubblicata in Ricerche Mat. 1, 124—144 (1952) (cfr. questo Zbl. 49, 167). F. Cafiero.

Pehakadze, Š. S.: **Über iterierte Integrale.** Soobsčenija Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 14, 1—10 (1953) [Russisch].

$f(x, y)$ sei in $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ fast überall definiert und dort beschränkt. $\int_a^b f(x, y) dx$ $\left[\int_a^b f(x, y) dx \right]$ bezeichne für festes y das obere [untere] L -Integral bezüglich x . Man erhält dann vier iterierte Integrale, und zwar das obere Integral $\int_b^d dx \int_a^b f(x, y) dy$, ein entsprechendes unteres Integral und zwei analoge durch Vertauschung von x und y . Verf. betrachtet auch entsprechende starke iterierte Integrale:

$$(S) \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^n} \int_c^d dy \int_{a_i^{n-1}}^{a_i^n} f(x, y) dx$$

mit $a_i^n: a + i(b-a)/2^n$. Diese Definitionen übertragen sich mittels der charakteristischen Funktion $q(E)$ unmittelbar auf beliebige beschränkte ebene meßbare Mengen E und durch den üblichen Grenzübergang auch auf nichtbeschränkte Mengen E . $f(x, y)$ heißt iteriert integrierbar (im starken Sinne), wenn alle vier oberen und unteren Integrale (im starken Sinne) gleich sind. Verf. formuliert neun Sätze ohne Beweis, darunter: $(S) \int dy \int q(E) dx$ $\left[(S) \int dy \int q(E) dx \right]$ ist als Mengenfunktion aufgefaßt ein äußeres [inneres] Maß im Sinne von Carathéodory. Das braucht nicht zu gelten, wenn man gewöhnliche obere und untere iterierte Integrale betrachtet. Eine auf R fast überall definierte und beschränkte Funktion ist genau

dann iteriert integrierbar, wenn die iterierten Integrale $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$ und $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$ im Lebeguesschen Sinne existieren und übereinstimmen. Es werden weitere Theoreme angegeben über die iterierte Integrierbarkeit einer Summe von Funktionen und einer Folge von Funktionen. Anscheinend im Zusammenhang damit wird folgende Begriffsbildung eingeführt: $f(x)$ sei eine beliebige im R_μ definierte Funktion und $E \subset R_\mu$ eine meßbare Menge, $x_0 \in E$ sei Dichtepunkt. Dann soll an der Stelle x_0 die obere approximative Limesfunktion von $f(x)$ als untere Grenze aller reellen y definiert sein, für die die Menge $\{x: f(x) > y\} \cap E$ in x_0 von der Dichte 0 ist. Sinngemäß analog wird die untere approximative Limesfunktion definiert.

L. Schmetterer.

Huron, Roger: Sur la continuité d'un opérateur intégral. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, IV. Sér. 16, 140—152 (1953).

Etude de l'intégrale $U(\varepsilon) = \int_a^b \frac{\psi(\varepsilon) - \psi(s)}{\varepsilon - s} ds$. Il est supposé que cette intégrale a un sens, que $\psi(x)$ est continu pour $a \leq x \leq b$ et que $\int_a^b \frac{\gamma(x)}{x} dx$ est bornée [où $\gamma(h)$ est le module de continuité de $\psi(x)$]. Alors il est démontré que $U(\varepsilon)$ est continue 1. pour $a < \varepsilon < b$, 2. pour $\varepsilon = a$ (ou $\varepsilon = b$) si on suppose en outre que $\gamma(h)$ vérifie une condition de Dini-Lipschitz, à savoir que $\lim_{h \rightarrow 0} \gamma(h) \log(1/|h|) = 0$.

A. van Heemert.

Giuliano, Landolino: Sopra un'estensione del concetto di funzione generalmente a variazione limitata. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 7, 65—78 (1953).

Una funzione f reale definita nel quadrato D di vertici opposti $(0, 0)$ e $(1, 1)$ è detta dall'A. generalmente a variazione limitata in D di ordine p ($0 < p \leq 1$), quando esiste un sottoinsieme I di D di misura superficiale nulla tale che, detta F la restrizione di f a $D - I$, la variazione totale, $V_x(y)$, di F , considerata come funzione della sola x , e la variazione totale, $V_y(x)$, di F , considerata come funzione della sola y , risultino di potenza p sommabile in $(0, 1)$. L'A. estende quindi alla classe delle funzioni generalmente a variazione limitata in D di ordine p , più ampia di quella delle funzioni generalmente a variazione limitata (secondo Tonelli) già considerata da Cesari, alcuni suoi teoremi enunciati in un precedente lavoro (questo Zbl. 48, 291), del quale chiarisce alcuni punti.

F. Cafiero.

Bajraktarević, Mahmud: Sur quelques cas spéciaux du théorème généralisé de la moyenne. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 8, 115—127 und französ. Zusammenfassg. 127—128 (1953) [Serbisch].

L'A. avait démontré antérieurement (ce Zbl. 45, 174) le théorème suivant: Soit $\xi(x_1, x_2)$ une fonction définie dans la région $a \leq x_1 \leq b, a \leq x_2 \leq b$. Si les dérivées partielles de cette dernière fonction, p, q et s existent et $p, q \geq 0$ par chaque x_1 et x_2 de la région citée, pour l'existence de deux telles fonctions, $f(x)$ et $g(x)$ que soit vérifié le premier théorème généralisé sur la valeur moyenne

$$[f(x_2) - f(x_1)] / [\varphi(x_2) - \varphi(x_1)] = f'(\xi) / \varphi'(\xi), \quad x_1 \leq \xi \leq x_2,$$

les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes 1. $\xi(x_1, x_2) = \xi(x_2, x_1)$; 2. $\xi(x, x) = x$; 3. l'expression: $u'(s + q \partial z_1 / \partial x_1 + p \partial z_2 / \partial x_2) / p q$ soit une fonction de ξ , à savoir $u = u(\xi)$, où l'on a $z = \log [q(x_2) - q(x_1)]$. L'A. démontre dans son travail considéré qu'il était possible sous certaines conditions, de remplacer la condition 3. par deux autres plus commodes dans les applications. En effet introduisant une nouvelle quantité $v = u - 2z$, la condition 3. obtient la forme d'une équation linéaire aux dérivées partielles $q \partial v / \partial x_1 + p \partial v / \partial x_2 = 2s$. L'étude de l'inté-

grale générale de cette dernière équation permet à l'A. d'en tirer plusieurs conclusions sur les fonctions particulières qui résultent de son analyse des équations obtenues.

N. Saltykow.

Singer, Ivan: Théorèmes de moyenne pour les systèmes de fonctions. Acad. Republ. popul. Române, Bul. ști., Sect. Ști. mat. fiz. 5, 251—271, russ. und französ. Zusammenfassg. 269—271 (1953) [Rumänisch].

Soient (1) q_0, q_1, \dots, q_n des fonctions réelles, définies et continues sur l'intervalle compact $[a, b]$. Si k est un entier $\leq n$ et a_0, a_1, \dots, a_k sont des nombres réels dont un au moins diffère de zéro, alors on dit que l'expression $a_0 q_0(x) + a_1 q_1(x) + \dots + a_k q_k(x)$ est un polynôme d'ordre k . Soit $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq b$. Si f est une fonction réelle définie sur $[a, b]$ alors le polynôme d'ordre $\leq n$ prenant les valeurs $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{n+1})$ aux points x_i ($1 \leq i \leq n+1$) est le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f et aux noeuds x_i ($1 \leq i \leq n+1$). On définit la „différence divisée généralisée“ de la fonction f sur les noeuds x_i ($1 \leq i \leq n+1$) relativement au système de fonctions (1) comme le coefficient de $q_n(x)$ dans le polynôme de Lagrange associé à f et aux noeuds x_i ($1 \leq i \leq n+1$) et on la désigne par

$$\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f\} \text{ ou } \left\{ \begin{matrix} q_0, q_1, \dots, q_n \\ x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \end{matrix} ; f \right\}.$$

On a: Théorème 1. Si les fonctions (1) forment un système Tchébycheff de l'ordre $0, 1, \dots, n$ sur $[a, b]$ et si f est continue sur le plus petit intervalle compact qui contient les noeuds $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ de $[a, b]$, il existe un point ξ compris entre x_1 et x_{n+1} et tel que dans tout voisinage de ξ on puisse trouver $n+1$ points $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+1}$ jouissant des propriétés suivantes: $x'_1 < \xi < x'_{n+1}$ et $\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f\} = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+1}; f\}$. Théorème 2. Si 1. les fonctions $q'_1(x), q'_2(x), \dots, q'_n(x)$ forment un système de Tchébycheff de l'ordre $n-1$ sur $[a, b]$, 2. $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ sont $n+1$ points quelconques de $[a, b]$, 3. f est continue sur $[a, b]$ et dérivable dans tout intervalle ouvert (x_i, x_{i+1}) ($1 \leq i \leq n$), alors il existe n points $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, tels que $x_1 < \xi_1 < x_2 < \dots < x_n < \xi_n < x_{n+1}$ et

$$\left\{ \begin{matrix} 1, q_1, \dots, q_n \\ x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \end{matrix} ; f \right\} = \left\{ \begin{matrix} q'_1, q'_2, \dots, q'_n \\ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \end{matrix} ; f \right\}.$$

Le théorème 1 ci-dessus généralise certains théorèmes de moyenne de T. Popoviciu, R. Frisch, T. Boggio, D. Pompeiu, Stieltjes, L. Bruwier, G. Polya.

S. Marcus.

Belgrano Bremard, J. C.: Abschätzungen der Reste in den Formeln von Euler-Maclaurin. Revista mat. Hisp.-Amer. IV. Ser. 13, 320—327 (1953) [Spanisch].

Im Anschluß an die Darstellung bei Knopp, Theory and application of infinite series (London 1928), Ch. XIV, gibt Verf. unter verschiedenen Voraussetzungen Fehlerabschätzungen für die Eulersche Summenformel für $\sum_{k=0}^n f(k)$

wie auch für die Maclaurinsche für $\sum_{k=0}^{n-1} f(2k+1)$ ($n \geq 2m$), wobei auf die leichte Gewinnbarkeit der letzteren aus der ersteren besonders hingewiesen wird. Der Reihe nach werden die Fälle betrachtet, daß a) $f^{(2l+1)}(x)$ monoton, insbesondere b) $f^{(2l+2)}(x)$ monoton, stetig und festen Zeichens, c) $f^{(2l+1)}(x)$ und $f^{(2l+3)}(x)$ beide in gleichem Sinne monoton und ohne Vorzeichenwechsel. Für den Fehler nach Berücksichtigung von l Summengliedern ergibt sich z. B. im Falle c) die Darstellung $R_l = \theta \frac{B_{2l+2}}{(2l+2)!} (f^{(2l+1)}(n) - f^{(2l+1)}(0))$, wie sie bei Knopp a. a. O. S. 539 unter wesentlich schärferen Voraussetzungen zu finden ist. Es fällt auf, daß S. 327 die wohl bekannte, z. B. aus der erzeugenden Funktion der Bernoullischen Polynome ohne

weiteres hervorgehende Beziehung $B_{2l}(\frac{1}{2}) = (1 - 2^{-2l+1}) B_{2l}$ als eine Vermutung hingestellt wird, die Verf. für $l = 1, 2, 3, 4$ bestätigt habe.

Hermann Schmidt (Würzburg).

Allgemeine Reihenlehre:

Bortone, Guido: Sull'estensione alle serie doppie dei metodi di sommazione di Gronwall. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. **86**, 769—802 (1953).

Es werden Gronwallverfahren (Gronwall, dies. Zbl. **3**, 55) für Doppelreihen erklärt und einige ihrer Eigenschaften untersucht. Es sei B die 4-dimensionale Punktmenge $|\xi| < 1$, $|\eta| < 1$ (ξ und η komplexe Veränderliche) mit dem Rand FB . In B seien zwei holomorphe Funktionen $x = f_1(\xi, \eta)$, $y = f_2(\xi, \eta)$ erklärt, die in $B \rightarrow FB$ stetig sind und $B + FB$ eindeutig auf $D \rightarrow FD$ abbilden. Ist $g(\xi, \eta) = \sum b_{mn} \xi^m \eta^n$ holomorph in einer Umgebung von $\xi = \eta = 0$ und $b_{mn} = 0$ für alle m und n , so heißt eine Reihe $\sum u_{mn}$ $[f_1, f_2, g]$ -summierbar, falls für die durch $g(\xi, \eta) \sum u_{mn} x^m y^n = \sum b_{mn} U_{mn} \xi^m \eta^n$ erklärte Doppelfolge $\{U_{mn}\}$ gilt: $\lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} U_{mn}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{m \rightarrow \infty} U_{mn})$ und $\sum U_{mn} \xi^m \eta^n$ konvergiert absolut in B . Es werden Vergleichssätze für diese Verfahren (insbesondere Permanenzsätze), Vergleichssätze mit dem Abelverfahren für Doppelreihen und Fragen der analytischen Fortsetzung besprochen.

A. Peyerimhoff.

Obrechhoff (Obreškov), Nikola: Über einige Sätze zur Summierung divergenter Reihen. B'lgarsk. Akad. Nauk. Otdel. fiz.-mat. techn. Nauki. Izvestija mat. Inst. **1**, 3—24, russ. Zusammenfassg. 25—26 (1953) [Bulgarisch].

Verf. stellt Umkehrsätze auf, bei denen die Funktion bzw. Folge nur in gewissen Intervallen betrachtet wird. Dieser Satztyp (gemischte Lückenbedingung) geht auf Meyer-König zurück (dies. Zbl. **21**, 219; **24**, 29). Verf. läßt außerdem eine recht allgemeine Asymptotik (mit regulärem Wachstum) zu, so daß seine Ergebnisse auch den Charakter von Konvexitätssätzen tragen. — Die verwendeten Intervalle (n_k, n'_k) liegen monoton ($n'_k = n_{k+1}$) und sind genügend lang ($(n'_k/n_k) > 1 + \delta$, wo $\delta > 0$ fest). Die Asymptotik ist gegeben durch eine Funktion $\varphi(x) > 0$ mit $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\lambda x)}{\varphi(x)} = \lambda^m$ für jedes $\lambda > 0$ (wo m beliebig reell). — Verf. schließt aus $f(x) \sim A \varphi(x)$ (für $x \rightarrow \infty$ in diesen Intervallen) auf

$$f^{(j)}(x) \sim A m(m-1) \cdots (m-j+1) x^{-j} \varphi(x)$$

in etwas kleineren Intervallen, nämlich $n_k(1-\varepsilon), n'_k(1-\varepsilon)$, wo $\varepsilon > 0$ fest; und zwar benötigt er dazu eine der folgenden Zusatzbedingungen. 1. In den (größeren) Intervallen ist q gleichartig monoton; für ein $n > j$ gilt dort $f^{(n)}(x) > -M x^{-n} q(x)$; 2. In den (größeren) Intervallen ist $f^{(j)}$ gleichartig monoton. — Bei einer Variante mit zweiseitiger Bedingung wird die Verkleinerung der Intervalle vermieden. Entsprechende Resultate gelten auch für Folgen (statt Funktionen). — Der zweite Teil der Arbeit befaßt sich mit der Konvergenzgeschwindigkeit bei der starken C_1^2 -Summierbarkeit von Fourierreihen. Die Teilsummen S_k der Fourierreihe einer Funktion f aus Lip α (wo $\alpha = \frac{1}{2}$) erfüllen

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (S_k - f(x))^2 < \frac{M}{n^{2\alpha}}.$$

Für $\alpha \geq \frac{1}{2}$ gilt das jedoch nicht immer.

K. Zeller.

Bruijn, N. G. de and P. Erdős: On a recursion formula and some Tauberian theorems. J. Res. nat. Bur. Standards **50**, 161—164 (1953).

Zu einer gegebenen Folge c_1, c_2, \dots mit $c_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1$ wird eine neue Folge f_1, f_2, \dots gemäß $f_1 = 1$, $f_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k f_{n-k}$ für $n \geq 1$ gebildet. Mit Hilfe der zugehörigen erzeugenden Funktionen werden unter gewissen Voraussetzungen asymptotische Beziehungen zwischen den Partialsummen der c_k und der f_n hergeleitet.

L. Berg.

Bajraktarević, M.: Sur les suites définies par l'équation

$$x_0 = \varepsilon_0 f(\varepsilon_1 f(\dots(\varepsilon_r f(0)) \dots)).$$

Srpska Akad. Nauk, Zbornik Radova mat. Inst. 35, Nr. 3, 61—73 und französ. Zusammenfassg. 73—74 (1953) [Serbisch].

Every number $z \in I = [0, 2]$ written in the binary representation $z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{2^n}$ ($d_n = 0$ or 1) gives rise to a sequence

$$\varepsilon_0 = 1 - 2d_0, \quad \varepsilon_n = \frac{1 - d_n}{1 - 2d_{n-1}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

The sequence ε_n and a function f enable us to define a sequence

$$(1) \quad x_n = \varepsilon_0 f(\varepsilon_1 f(\dots(\varepsilon_n f(0)) \dots))$$

for which the author proves: Theorem. Let f be a continuous function defined on $[-a, a]$ ($a > 0$) and monotonically increasing with $f(-a) = b \geq 0$ ($|x| \leq a$) and $f(a) = a$. Then: 1. Every sequence (1) has at least two limit points $u_1(z) = \liminf x_n$, $u_2(z) = \limsup x_n$ ($n \rightarrow \infty$); 2. The functions u_1 and u_2 are strictly decreasing from a to $-a$ as z runs from 0 to 2; 3. u_1 is continuous from the right in $(0, 2]$ and u_2 is continuous from the left on $[0, 2)$; 4. If $u_1(z) = u_2(z)$ for at least one z , then the points of discontinuity of u_1 and u_2 are dense in I . Some restrictions on f are studied to assure the continuity of u_1 (in this case $u_1 = u_2$). For example u_1 is continuous in I if and only if $b = f(-a) = 0$ and $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. These

results are illustrated on the function $f(x) = \frac{a}{2^m} \lfloor 2^m x \rfloor$ ($m > 0$). If $0 < m < \frac{1}{2}$ then $u_1(z) < u_2(z)$ for at least one $z \in I$; if $\frac{1}{2} \leq m < 4$ then $u_1(z) = u_2(z)$ are continuous functions in I . The case $m > 4$ is still open. S. Kurepa.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Izumi, Shin-ichi: Notes on Fourier analysis. (XI). J. Math. 1, 80—86 (1953).

This note consists of three sections: The first deals with a problem raised by the reviewer concerning the equivalence of two definitions of quasi-orthonormality. By exhibiting a simple example the author shows that a class of sequences of functions is a proper subclass of the class of quasi-orthonormal functions which was introduced by Rademacher. The second section of the note contains a generalization of the theorem of Kaczmarz and Steinhaus on the Lebesgue functions of orthonormal systems: Using the process of dyadic indices developed by Koksma and the reviewer the author proves: If $\{q_k\}$ is an orthonormal system on $[0, 1]$ and if

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{M+N} q_k(t) q_k(u) \right)^2 dt du = O(N) \quad \text{independently of } M \text{ then}$$

$L_n(t) = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n q_k(t) q_k(u) \right| du = O(n \log^{1-\varepsilon} n)^{1/2}$ a.e. for every $\varepsilon > 0$. A further generalization is also stated. The third section concerns a generalization of the Riemann

sums $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(x + \frac{k}{n}\right) = F_n(x)$. The author considers a sequence $\{f_k\}$ of L^2 -func-

tions with period 1 and proves a theorem on the sum $F_{n,k}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_k\left(x + \frac{i}{n}\right)$:

If $\int_0^1 |f_k(x) - f_k(x+u)|^2 dx = O(q(n))$ independently of k and if $\sum q(n_k^{-1}) < +\infty$

then $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(F_{n_k}(x) - \int_0^1 f_k(x) dx \right) = 0$.

J. S. Gál.

Shukla, U.: A theorem on the non-summability of the conjugate series of a Fourier series. *Ganita* 4, 95—98 (1953).

Let $\sum (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$ be the series conjugate to the Fourier series of $f(x) \in L(0, 2\pi)$. Let $\psi_x(t) = \psi(t) = \frac{1}{2} [f(x+t) - f(x-t)]$. The function associated with the conjugate F.s. is $f_*(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} f_\epsilon(x)$, where $f_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon}^{\pi} \psi(t) \cot(\frac{1}{2}t) dt$.

B. N. Prasad proved (cf. this Zbl. 5, 249) that the divergence of $f_*(x)$ to $\pm \infty$ implies the divergence to $\pm \infty$ of the Abel mean of the conjugate series. The problem as to whether the proper divergence of Abel mean of the conjugate series implies the proper divergence of $f_*(x)$ to the same limit remained open. In the present paper the

author shows that this is true under an additional condition viz. $\int_0^t \psi(u) du = O(t)$,

as t tends to 0. The proof is exactly like that of theorem 76 of Hardy and Rogosinski's book "Fourier Series" (Cambridge 1944) with the only difference that o of that theorem has been replaced by O here. In fact Hardy and Rogosinski's theorem implicitly contains this result. It may be observed that Prasad's result is more general than the sufficiency part of the author's theorem.

U. N. Singh.

Levin, V. I.: Abschätzung für die Grenze der Genauigkeit der asymptotischen Entwicklungen einer gewissen Klasse von Funktionen. *Trudy Moskovsk. mat. Obšč.* 2, 383—395 (1953) [Russisch].

Es sei $f(t)$ eine Funktion, die für $t \rightarrow \infty$ die asymptotische Entwicklung $f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{-\gamma-n}$ mit $\gamma > 0$ besitzt. $r_N(t) = |f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^{-\gamma-n}|$ und $r(t) = \inf_{N \geq 0} r_N(t)$ der kleinste Fehler, bis auf den die Funktion $f(t)$ bei gegebenem t mit

Hilfe ihrer asymptotischen Entwicklung berechnet werden kann. Unter gewissen Voraussetzungen, die sich im wesentlichen auf die Laplace-Transformierte von $f(t)$ beziehen, untersucht Verf. das genaue asymptotische Verhalten von $r_N(t)$ und $r(t)$. Dabei wird die bekannte Tatsache, daß $r_N(t)$ bei manchen asymptotischen Entwicklungen kleiner ist als der Betrag des ersten vernachlässigten Gliedes, verschärft und verallgemeinert.

L. Berg.

Obrechhoff, Nikola: Sur quelques classes de fonctions et de suites. *C. r. Acad. Bulgare Sci.* 4, Nr. 2 3, 1—4 u. französ. Zusammenfassg. 4 (1953) [Russisch].

Verf. gibt einen einfachen Beweis des Bernsteinschen Satzes über die kanonische Darstellung regulär monotoner Funktionen [S. N. Bernstein, *Acta Math.* 52, 1—66 (1928)] und des Momentensatzes von Hausdorff. Am Ende wird bemerkt, das zur selben Zeit dieser Beweis auch von B. N. Korenbljum (dies. Zbl. 45, 34) gefunden wurde.

G. Freud.

Spezielle Funktionen:

● **Rossum, H. van:** A theory of orthogonal polynomials based on the Padé table (Dissertatie Utrecht 1953). Assen: van Gorcum & Comp. N. V. 1953, 76 p., f 8,50.

Nørlund, Niels Erik: Sur les fonctions hypergéométriques. *C. r. Acad. Sci., Paris* 237, 1371—1373, 1466—1468 (1953).

Vgl. die Besprechung der ausführlichen Arbeit des Verf. aus dem Jahre 1955 in diesem Zbl. 67, 294.

Hull, T. E., C. A. Swanson and D. A. Trumpler: Bessel expansions of the confluent hypergeometric functions. *Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, III. Ser.* 47, 7—16 (1953).

Zunächst wird das bekannte Verfahren zur Überführung einer linearen homogenen (l. h.) Differentialgleichung 2. Ordnung in eine Volterrasche Integralgleichung auf den allgemeinen Fall der Ordnung n übertragen; aus

$$(1) \quad L(y) = y^{(n)} + \sum_0^{n-1} q_i(z) y^{(i)} = \sum_0^{n-1} r_i(z) y^{(i)}$$

wird dabei

$$(2) \quad y(z) = \sum_1^n a_\nu y_\nu(z) + \int_{\varepsilon}^z K(z, x) y(x) dx \quad (a_\nu, \varepsilon \text{ fest}),$$

$y_\nu(z)$ Fundamentalsystem der l. h. Gleichung $L(y) = 0$. Weiterhin wird wieder $n = 2$ angenommen. Die l. h. Differentialgleichung mit den Lösungen $J_{\pm \nu}(\lambda z)$ ($\nu \neq$ ganz, λ beliebig) läßt sich in die Form (1) bringen, wobei $L(y) = 0$ die Besselsche Differentialgleichung mit dem Argument z bedeutet. Die Lösung von (2) mittels schrittweiser Näherungen führt dann zu den bekannten Multiplikationstheoremen der Zylinderfunktionen. Aber auch die Whittakersche Differentialgleichung kann auf die Gestalt (1) mit der nämlichen linken Seite gebracht werden, und das führt zu Entwicklungen der Whittakerschen Funktionen nach Produkten $z^{i-1} J_{-(2m-i)}(z)$ ($z = 2 \sqrt{k y}$), welche denen von Tricomi (s. dies. Zbl. 25, 402) sowie des Ref. (s. dies. Zbl. 18, 206 — letztere den Verf. offenbar unbekannt —) sehr nahe stehen. Schließlich wird die asymptotische Darstellung für $k \rightarrow \infty$ bei $z = O(1)$ nachgewiesen, wie dies für seine Entwicklungsform (nach Potenzen von $(k - m - \frac{1}{2})^{-1}$ in der Whittakerschen Bezeichnungsweise) auch Ref. schon (auf einfachere Weise) durchgeführt hatte (a. a. O. S. 542 (16)).

Hermann Schmidt (Würzburg).

Delerue, P.: Sur le calcul symbolique à n variables et les fonctions hyperbesséliennes. II: Fonctions hyperbesséliennes. Ann. Soc. Sci. Bruxelles. I. Sér. 67, 229—274 (1953).

(Teil I. s. dies. Zbl. 50, 330). Verf. ersetzt in der bekannten Darstellung der Besselschen Funktion durch eine hypergeometrische Reihe in der Form

$$J_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} {}_0F_1\left(\nu+1; -\frac{x^2}{2}\right)$$

diese durch eine ebensolche mit n Nennerparametern $\lambda_j + 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$; λ_j nicht negativ ganzzahlig). Die nach Multiplikation mit einem passenden Faktor der Form $e^{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}$ entstehenden Funktionen (im folgenden kurz HB-Funktionen, der Ordnung n) stimmen für ganzzahlige $\lambda_j > 0$ überein mit den entsprechenden Koeffizienten der Laurententwicklung der Funktion $\exp\left(\frac{x}{n+1}(u_1 + \dots + u_n + u_{n+1})\right)$ nach Potenzen der u_j , welche letztere auch zur Definition von Funktionen mit negativ-ganzzahligen Indizes dient. Durch Einführung der Argumente $x \cdot \exp\left(\frac{\pi i}{n+1}\right)$ bzw. $x \cdot \exp\left(\frac{\pi i}{2(n+1)}\right)$ gelangt man zu Gegenstücken der „modifizierten Besselschen“ bzw. der Kelvinschen Funktionen her und bei. Es folgt dann die Berechnung der Bildfunktionen bei ein- und mehrdimensionaler Laplace-Transformation (in Operatorschreibweise); das Argument ist in der Oberfunktion $(n+1) \sqrt[n+1]{x}$ bzw. $(n+1) \sqrt[n+1]{x_1 x_2 \dots x_n}$. Im ersten Falle gehen Funktionen niedrigerer Ordnung hervor, was die schrittweise Übertragung bekannter Relationen (Reihen vom Neumannschen Typ) auf die HB-Funktionen ermöglicht. Die mehrdimensionale Transformation gestattet die Gewinnung von Rekursionsformeln verschiedener Art, darunter lineare nichthomogene Differentialgleichungen mit einer Funktion mit gewissen um eins erniedrigten Indizes rechts, was zu Integralformeln mit solchen Integranden führt; ähnlich auch für Ableitungen nach Parametern. Der elementare Spezialfall der Funktionen mit halbzahligem Index hat ein bemerk-

kenswertes Gegenstück: es erscheinen für gewisse rationale Indizes vom Nenner $n + 1$ die (für $n = 3$ von Appell eingeführten) (hyperbolischen oder zirkulären) zyklischen Funktionen, welche dann auch in den mehrfachen Integralen als „Kern“ auftreten, die als Gegenstück zu den Poissonschen Integraldarstellungen der klassischen Zylinderfunktionen zu gelten haben. Schließlich werden noch homogene Differentialgleichungen $(n + 1)$ -ter Ordnung mit einfachen rationalen Koeffizienten gewonnen; ein Fundamentalsystem aus HB-Funktionen läßt sich angeben, wenn keine Indizes negativ-ganz sind und auch keine ganzzahligen Differenzen zwischen solchen auftreten. Als Beispiel wird die Lösung der Differentialgleichung $y^{(n)} + x^q y = 0$ (auch für nicht-ganzzahlige q) auf HB-Funktionen zurückgeführt. Zum Schluß noch Berechnung bestimmter Integrale und Anwendung auf gewisse partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Hermann Schmidt (Würzburg).

Funktionentheorie:

● Kaplan, Willfred: *A first course in functions of a complex variable*. (Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1953. 144 p., 62 illus., \$ 3.50.

Wiederabdruck des Kapitels 9 des in diesem Zbl. 47, 283 besprochenen Buches.

Mikhail, M. N.: *On the order of the reciprocal set of a basic set of polynomials*. Pacific J. Math. 3, 617—623 (1953).

Ist P die Matrix eines Whittakerschen Systems von „Basispolynomen“ (J. M. Whittaker, *Interpolatory function theory*, dies. Zbl. 12, 155, Kap. II: *Sur les séries de base de polynômes quelconques*, dies. Zbl. 38, 228), H die zugehörige reziproke Matrix, so daß also $(p_r(z)) = P \cdot (z^n)$, $(z^n) = H \cdot (p_r(z))$, so heißt das Polynomsystem $(P_r(z)) = H \cdot (z^n)$ das reziproke. Verf. gewinnt unter einigen Einschränkungen, die insbesondere das Wachstum des Grades des Polynoms von maximalem Grad in der obigen Darstellung einer Potenz betreffen, Abschätzungen für die Ordnung (im Sinne von Whittaker a. a. O.) des reziproken Systems, wenn die des gegebenen bekannt ist, und zeigt an Beispielen, daß die Schranken angenommen werden. Die allgemeinen Beweise sind jedoch nicht frei von Unklarheiten.

Hermann Schmidt (Würzburg).

Mikhail, M. N.: *Basic sets of polynomials and their reciprocal, product and quotient sets*. Duke math. J. 20, 459—479 (1953).

Wie in der vorstehend besprochenen Arbeit des Verf. sei P eine unendliche, zeilenfinit Matrix aus komplexen Zahlen, die zu einer J. M. Whittakerschen „Basis-Polynomfolge“ $(p_n(z))_n = P(z^k)$ gehört, d. h. im Bereich der zeilenfiniten Matrizen eine eindeutige Reziproke besitzt (entsprechend für Q). Dann gehören auch $\Pi = P^{-1}$, PQ , PQ^{-1} zu Basisfolgen. Zur Definition der „Ordnung“ ω einer Basisfolge zieht nun Whittaker (in den a. a. O. genannten Büchern) das Maximum des Betrages der Polynome auf konzentrischen Kreisen heran. Verf. zeigt, daß ähnlich wie in der Theorie der ganzen Funktionen oft mit Vorteil an Stelle des Maximalbetrags der Funktion das Maximalglied der Potenzentwicklung benützt wird, sich Vereinfachungen erzielen lassen, wenn man unter Beschränkung auf die auch schon von Cannon und Whittaker gesondert betrachteten Folgen mit der Eigenschaft $D_n = O(n)$ den Wert $M_n = \max_{i,j} |\pi_{ni} \cdot p_{ij}|$ heranzieht; hierbei ist D_n der Maximalgrad eines der in der abbrechenden Entwicklung $z^n = \sum_i \pi_{ni} p_i(z)$ auftretenden Polynoms, und es wird dann $\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n / n \log n$. Auf dieser Grundlage werden nun Beweise

für bekannte und neue Abschätzungen für die Ordnung der genannten abgeleiteten Folgen gegeben, wenn jeweils die Ordnung für die gegebenen Folgen bekannt ist. Die Ergebnisse werden besonders einfach, wenn p_n bzw. q_n genau vom Grade n ist; Die Ergebnisse werden besonders einfach, wenn p_n bzw. q_n genau vom Grade n ist; trifft beides zu, und ist überdies q_n normiert, so wird z. B. (Nassif) $\omega_{pq} < \omega_p + 2 \omega_q$.

In verschiedenen Fällen wird durch Beispiele gezeigt, daß es sich um beste Abschätzungen handelt. Weiterhin wird untersucht, für welche R die gegebene bzw. eine der abgeleiteten Folgen für die Kreisscheibe $|z| \leq R$ „wirksam“ (effektiv) ist, d. h. jede dort reguläre Funktion gleichmäßig darzustellen erlaubt. Die zugehörigen R -Werte liegen in gewissen Intervallen, deren Enden durch Ausdrücke der folgenden Art bestimmt sind: $C = \overline{\lim}_{\{d_n\}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\overline{\lim}_i \tau_{ni} p_{id_n} \right)^{1/n}$; dabei sind alle Folgen d_n mit

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{n} = 1$ zur Bildung der äußeren der auftretenden oberen Grenzen zu berücksichtigen; noch etwas verwickeltere Bildungen für Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{n} \geq 1$. Zum

Unterschied von Whittaker (Kap. X des a. a. O. zweitgenannten Buches) werden hier auch Sätze bewiesen, bei denen für die Bestimmung der Spielräume für R bei einer der abgeleiteten Folgen nichts explizit über die Wirksamkeitsbereiche der gegebenen vorausgesetzt wird. Durchsichtig werden die Ergebnisse für Folgen mit beschränkten Elementen der Matrix P . Hermann Schmidt (Würzburg).

Evgrafov, M. A.: Über die Vollständigkeit von Systemen analytischer Funktionen, die sich wenig von $\{z^n P(z)\}$, $\{\varphi(z)\}^n$ unterscheiden, und über gewisse Interpolationsaufgaben. Izvestija Akad. Nauk SSSR. Ser. mat. **17**, 421—460 (1953) [Russisch].

Partons d'un développement $1(\zeta - z) = \sum v_n(\zeta) f_n(z)$ uniformément convergent pour $|z| \leq \varrho$, $|\zeta| \geq R$, les f_n étant de la forme $f_n(z) = z^n \cdot \sum_{m=n+1}^{\infty} a_{nm} z^m$; les v_n sont alors de la forme

$v_n(\zeta) = \zeta^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} b_{nk} \zeta^{-k-1}$, et les deux systèmes sont biorthogonaux: $\int_C f_n(z) v_m(z) dz = \delta_{mn}$ ($\varrho < \text{rayon } C < R$). Toute fonction $f(z)$ régulière dans $|z| < R$ admet un développement

$\sum a_n f_n(z)$ qui converge uniformément au moins dans $|z| \leq \varrho$, avec $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) v_n(z) dz$;

si maintenant $F(z, \zeta) = \sum f_n(z) \zeta^{n-1}$ converge uniformément au voisinage de tout couple tel que $|\zeta| \geq r$, $z \in S_r$ et si $f(z)$ est représentable sous la forme $(2\pi i)^{-1} \int F(z, \zeta) g(\zeta) d\zeta$ où l'intégrale est prise sur $|\zeta| = r_1 < r$, $f(z)$ est représentable dans S_r sous la forme $a_n f_n(z)$, la convergence étant uniforme à l'intérieur de S_r ; de plus, si F est régulière pour ζ hors de G et $z \in S_a$, la série $\sum a_n f_n(z)$ est sommable dans S_a avec la somme $f(z)$, par un procédé indépendant de la fonction particulière $f(z)$. Les problèmes relatifs au développement de $f(z)$ selon le système des $f_n(z)$ sont ainsi ramenés à la résolution d'une équation intégrale. Si les $f_n(z)$ sont voisins d'un système simple connu, on se ramène à une équation intégrale de la forme $P(z) g(z) = \frac{\lambda}{2\pi i} \int_C K(z, \zeta) g(\zeta) d\zeta + f(z)$ dont l'A. discute quelques propriétés. Les résultats obtenus sont appliqués, à titre d'exemple, à l'étude des problèmes d'interpolation où les données sont: les $F^{(n)}(q^n + \lambda_n)$ ($|q| > 1$), puis les $F^{(n)}(n + \lambda_n)$, puis enfin les $F^{(n)}((-1)^n + \lambda_n)$. Je citerai le théorème suivant: si $\sum |\lambda_n|^2$ converge, toute fonction entière $F(z)$ d'ordre un et de type inférieur à $\pi/4$ est déterminée par la donnée des $F^{(n)}((-1)^n + \lambda_n)$; par contre, il existe une fonction non identiquement nulle du type $\pi/4$ pour laquelle tous les $F^{(n)}((-1)^n + \lambda_n)$ s'annulent. G. Bourion.

Evgrafov, M. A.: Über Konstruktion und Eindeutigkeit einer ganzen Funktion $F(z)$ mit vorgegebenen Werten von $F^{(n)}(n^2)$. Izvestija Akad. Nauk SSSR. Ser. mat. **18**, 201—206 (1954) [Russisch].

Les méthodes exposées dans l'article analysé ci-dessus sont appliquées à l'étude de la détermination d'une fonction entière $F(z)$ par la donnée de la suite $\{F^{(n)}(n^2)\}$. G. Bourion.

Iliev, Ljubomir: Analytisch nicht fortsetzbare Reihen nach Faberschen Polynomen. B'lgarsk. Akad. Nauk., Otdel. fiz.-mat. techn. Nauki, Izvestija mat. Inst. **1**, 35—56 (1953) [Bulgarisch].

Es werden direkt die Ergebnisse von Szegö [Math. Ann. **87**, 90—111 (1922)] über Potenzreihen mit beschränkten Koeffizientenfolgen und die von Ilieff [vgl. dies.

Zbl. 36, 332] über Potenzreihen mit Koeffizienten c_n der Ordnung n^λ auf Reihen nach Faberschen Polynomen übertragen. Autoreferat.

Tchakaloff (Čakalov), Ljubomir: Über die polaren Singularitäten von Potenzreihen. B'lgarsk. Akad. Nauk., Otdel. fiz.-mat. techn. Nauki. Izvestija mat. Inst. 1, 69—82 russ. Zusammenfassung 81—82 (1953) [Bulgarisch].

Es sei (1) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Verf. stellt seine früheren Ergebnisse (dies. Zbl. 36, 331) dar und beweist weiter die folgenden neuen Sätze: (I) Falls die Funktion (1) im Kreise $|z| < 1$ holomorph ist und keine anderen Singularitäten als Pole auf der Peripherie des Einheitskreises hat, so ist $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \log |c_n| / \log n$ eine ganze nicht-negative Zahl und es ist $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| / n^\lambda = \infty$. (II) Wenn bei einem $\lambda \geq 0$ die Folge $\{c_n n^\lambda\}$ beschränkt bleibt, so kann die Funktion (1) keine Pole auf $|z| = 1$ von höherer Ordnung als $\lambda + 1$ haben. Wenn noch $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n / n^\lambda = 0$ gilt, so ist jeder Pol von $f(z)$ auf $|z| = 1$ höchstens von der Ordnung λ . L. Ilieff.

Tanaka, Chuji: Note on Dirichlet series. V: On the integral functions defined by Dirichlet series. (I.) Tôhoku math. J., II. Ser. 5, 67—78 (1953).

(Teil IV s. dies. Zbl. 51, 56). — Gegeben ist eine Dirichletsche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ mit reellen, monoton ins Unendliche strebenden Exponenten $\lambda_n \geq 0$, die in jeder rechten Halbebene gleichmäßig konvergiert und damit eine ganze Funktion $F(z)$ darstellt. Es handelt sich um Zusammenhänge zwischen dem Wachstum der Funktion und dem asymptotischen Verhalten der Koeffizienten. Wir beschränken uns auf Angaben über „Ordnungen“, denen in der Arbeit selbst entsprechende über „Typen“ gegenüberstehen. Zunächst wird die Wachstumsordnung ρ von F nach Ritt erklärt [vgl. z. B. Mandelbrojt, Séries lacunaires (dies. Zbl. 13, 270), p. 18, 19], entsprechend der „E-Ordnung“ bei Mügel. Meromorphe periodische Funktionen. Math. Nachr. 13, 187—230 (1955; dies. Zbl. 64, 318), 5, 2 und 7, 2; sie geht für $\lambda_n = n$ in die übliche Ordnung der Funktion von $z = e^{-s}$ über. Die Koeffizientenordnung bestimmt sich analog wie bei Potenzreihen durch $1/\rho_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \log |a_n| / \lambda_n \log \lambda_n$, die Exponentendichte wird durch $\theta = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^+ N(x)}{x \log x}$ gemessen, wo $N(x)$ die Anzahl der λ_n mit $|x| \leq \lambda_n < x$ bedeutet. Es gilt dann $1/\rho_c \leq 1/\rho \leq 1/\rho_c + \theta$. Ferner werden an Stelle der a_n noch gewisse (modifizierte) Koeffizientensummen betrachtet: $T_x = \sum_{-\infty < x < \infty} \sum_{\lambda_n \leq x} a_n e^{-i \lambda_n t}$ liefert analog zu ρ_c die Größe ρ_n^* , der vermöge $M_n = \sum_{1 \leq k < \infty} \sum_{\lambda_n \leq x} a_n e^{-\lambda_n(\sigma + it)}$ eine analog ρ gebildete „Wachstumsordnung der Teilsummen“ ρ_n entspricht. Jetzt gilt stets $\rho_n = \rho_n^*$, und falls $\Re(a_n) \geq 0$: $-\frac{1}{\rho_n} + \Delta \leq -\frac{1}{\rho} \leq -\frac{1}{\rho_n}$, wo $\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \cos \vartheta_n}{\lambda_n \log \lambda_n}$, $\vartheta_n = \arg a_n$. Verschiedene bisher nur unter schärferen Bedingungen bekannte Aussagen sind erhalten; so der Rittsche Satz: $\rho_c = \rho$, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \log n / \lambda_n = \infty$; in der Tat ist dann gewiß $\theta = 0$. Hermann Schmidt (Würzburg), K. W. Mügel.

Pompeiu, D.: Observations sur la représentation des fonctions analytiques. Comun. Acad. Republ. popul. Române 3, 247—248, russ. und französ. Zusammenfassg. 248 (1953) [Rumänisch].

Remarques sur diverses manières de représenter une fonction analytique au moyen d'éléments pris sur la frontière ou à l'intérieur du domaine de la variable. L'A. annonce des développements et applications ultérieurs. S. Stoilow.

Džrbašjan, M. M.: Über eine Integraldarstellung und die Eindeutigkeit gewisser Klassen ganzer Funktionen. Mat. Sbornik, n. Ser. 33, 485—530 (1953) [Russisch].
Proofs of results announced earlier (this Zbl. 49, 173). *A. J. Lohwater.*

Timan, A. F.: Über Interferenzerscheinungen im Verhalten der ganzen Funktionen endlicher Ordnung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 17—20 (1953) [Russisch].

$B_{\sigma}^{(q)}$ est la classe des fonctions entières $f(z)$ de degré $\sigma > 0$ vérifiant sur l'axe réel $|f(k\pi/\sigma)| < M$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) et $f(x) = o(|x|^q)$ quand $|x| \rightarrow \infty$ ($q > 0$); B_{σ} est la classe des fonctions entières de degré σ bornées sur l'axe réel.

L'A. étudie des opérateurs de la forme $R[f; z] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-t) d_{\sigma}(t)$ appliquant $B_{\sigma}^{(q)}$ dans B_{σ} . *G. Bourion.*

Bazilevič, I. E. und G. V. Korickij: Über einige Eigenschaften der schlichten konformen Abbildungen. Mat. Sbornik, n. Ser. 32 (74), 209—218 (1953) [Russisch].

The authors prove the two following theorems: 1. For every natural number $n \geq 1$ there exist an analytic and schlicht function $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $|z| < 1$ and two numbers ϱ_1, ϱ_2 , $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < 1$, such that $\alpha)$ the image of $|z| = \varrho_1$ possesses at least $4n$ points of inflection and $\beta)$ for every $\varrho \geq \varrho_2$ the image of $|z| = \varrho \geq \varrho_2$ possesses only two points of inflection. 2. For every natural number $n \geq 1$ there exist the function $f(z)$ analytic and schlicht in $|z| < 1$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ and two numbers $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < 1$ such that $\alpha)$ $\partial \arg f(z)/\partial \varphi$ changes the sign as z varies on $|z| = \varrho_1$ at least at $4n$ points and $\beta)$ for every circle $|z| = \varrho \geq \varrho_2$ only at four points. ($z = e^{i\varphi}$). *J. Górski.*

Iliev, Ljubomir: Über dreifach symmetrische schlichte Funktionen. B'lgarsk. Akad. Nauk., Otdel. fiz.-mat. techn. Nauki, Izvestija mat. Inst. 1, 27—34 (1953) [Bulgarisch].

Die 3-symmetrische Funktion $f(z) = z + a_1^{(3)}z^4 + a_2^{(3)}z^7 + \dots$ sei im Kreise $|z| < 1$ schlicht und regulär und es sei $\sigma_n^{(3)}(z) = z + a_1^{(3)}z^4 + \dots + a_n^{(3)}z^{3n+1}$. Es wird bewiesen: (I) $|a_2^{(3)}| < 0,579$; $|a_3^{(3)}| < 0,618$; $|a_4^{(3)}| < 0,636$; $|a_5^{(3)}| < 0,658$; $|a_6^{(3)}| < 0,683$; $|a_7^{(3)}| < 0,711$; $|a_8^{(3)}| < 0,741$; $|a_9^{(3)}| < 0,774$. (II) Bei $n \neq 2$ sind alle $\sigma_n^{(3)}(z)$ im Kreise $|z| < 3/2$ schlicht. Die Schranke $3/2$ ist exakt. (III) Die Summe $\sigma_n^{(3)}(z)$ ist im Kreise $|z| < \{1 - 8 \log \theta / (n-1) 3(n-1)\}^{1/3}$, $\theta = 7 \cdot 96^{3/8} \cdot 3^{1/4} \cdot 2^{7/8}$, schlicht. (VI) Das Polynom $\sigma_n^{(3)}(z)/z$ hat im Kreise $|z| \leq \{1 - 4 \log a(n+1)/3(n+1)\}^{1/6}$, $a = 7 \cdot 96^{3/2} \cdot 3^{3/4} \cdot 2^{1/2}$, keine Nullstelle.

Autoreferat.

Samanskij, V. E.: Einige Anwendungen der konformen Abbildungen wenig von einander verschiedener Gebiete mit Fixpunkten auf dem Rande in der Theorie der Filtration. Ukrain. mat. Žurn. 5, 401—412 (1953) [Russisch].

Es soll das vom Einheitskreis $|z| = 1$ begrenzte Gebiet auf ein Gebiet mit regulärer Randkurve $|z| = 1 + \delta(q)$ abgebildet werden, wobei $\delta(q) = \delta(q + 2\pi)$ ist, die drei Beträge $|\delta(q)|$, $|\delta'(q)|$, $|\delta''(q)|$ kleiner als ε sind, und außerdem δ für drei Werte von q verschwindet. Verf. leitet eine approximative Abbildungsfunktion her, deren Fehler $O(\varepsilon^2)$ ist. Analog wird das Problem für zwei andere mit einander verwandte Bereiche behandelt und sodann auf Filtrationsaufgaben angewandt.

K. Bögel.

Galbură, G.: Sur le genre d'une courbe algébrique. Comun. Acad. Republ. popul. Române 3, 105—107, russ. und französ. Zusammenfassg. 107 (1953) [Rumänisch].

Démonstration nouvelle de la relation classique de Riemann reliant entre eux le genre, le degré et le nombre des points de ramification d'une courbe algébrique.

La démonstration utilise un théorème de Morse sur les fonctions pseudo-harmoniques (Morse, Topological methods in the theory of functions of a complex variable, ce Zbl. 41, 396). S. Stoilow.

Potjagajlo, D. B.: Eine Bedingung für die Hyperbolizität einer gewissen Klasse von Riemannschen Flächen. Ukrain. mat. Žurn. 5, 459–463 (1953) [Russisch].

The author treats the class B^* of Riemann surfaces constructed in the following way. Horizontal slits are made in the w -plane from the points $w_k = v_k i$, $w'_k = v'_k i$ ($0 < k < \infty$) on the imaginary axis to the point at infinity. Along each of these slits is pasted a copy of the w -plane with horizontal slits emanating from w_k or w'_k . By this pasting process a Riemann surface F is obtained, having algebraic branch points of first order over w_k and w'_k and a branch point of infinite order over ∞ . The totality of surfaces F corresponding to all possible values v_k and v'_k constitutes the class B^* . The author studies the dependence of the type on the choice of w_k and w'_k and shows that if, for $F \in B^*$, $w_k = k i$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) and $w'_{k+1} || w'_k \rceil \geq q$ ($q > 1$), then F is of hyperbolic type. A. J. Lohwater.

Andreian, Cabiria: Relations de structure dans la famille des transformations intérieures. Acad. Republ. popul. Române, Bul. şti. Sect. Şti. mat. fiz. 5, 431–441, russ. und französ. Zusammenfassg. 439–441 (1953) [Rumänisch].

L'A. considère les familles suivantes de transformations entre une variété orientable à deux dimensions V , munie de ses diverses structures conformes, et une surface de Riemann donnée V_0 : 1. les transformations intérieures (I) 2. les transformations conformes (F). 3. Les transformations topologiques (T) et 4. les transformations topologiques conformes (C). Entre ces familles, leurs superpositions, ou leur combinaisons avec des transformations topologiques, l'A. établit des relations et isomorphismes de structure. S. Stoilow.

Ozaki, Shigeo, Isao Ono and Mitsuru Ozawa: On the function-theoretic identities in the three dimensional space. Sci. Reports Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A 4, 195–202 (1951).

Let $u^i = u^i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$, be of class C^∞ in a domain D in three-space, subject to the following conditions: (i) the Jacobian is positive except "at most on some curves", (ii) the mapping has at most a finite number of poles. Then the mapping is said to be quasi-meromorphic in D . For those mappings, the authors obtain analogues of the "area theorem" and the "argument principle". The methods are those of an earlier note [Ozaki and Ozawa, Sci. Reports Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A 4, 157–160 (1951)]. Let $n(u)$ denote the number of times the point $u = (u^1, u^2, u^3)$ is covered by the mapping above, let (D) denote the boundary of D and let V and (V) denote the images of D and (D) , respectively. By using Green's formula, the author's principal results may be stated as follows. Theorem 1. Let B be a domain in u space, and let $u(x^1, x^2, x^3)$ have neither poles nor zeros on (D) . Then

$$\frac{1}{3} \iint_{(V) \cap B} \|u\| \frac{\partial}{\partial n} \|u\| d\sigma + \frac{1}{3} \iint_{(B)} n(u) \|u\| \frac{\partial \|u\|}{\partial n} d\sigma = \iiint_B n(u) dV,$$

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{(V) \cap B} \frac{\partial}{\partial n} \left(-\frac{1}{\|u\|} \right) d\sigma + \frac{1}{4\pi} \iint_{(B)} n(u) \frac{\partial}{\partial n} \left(-\frac{1}{\|u\|} \right) d\sigma = n(0).$$

The authors conclude by discussing the distribution of image points, making use of the Riemann sphere in four-space. M. Roeder.

Ozaki, Shigeo, Isao Ono and Mitsuru Ozawa: A theorem of the pseudo-meromorphic function. Sci. Reports Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A 4, 203–205 (1951).

Diese Arbeit gibt eine "function-theoretic method" für den Beweis einer von Morse und Heins [Ann. of Math., II. Ser. 46, 600–666 (1945); 47, 233–273 (1946)] bewiesenen Relation zwischen den Anzahlen der Verzweigungspunkte, der Pole, der Randkomponenten und der Winkelvariation auf den Bildkurven dieser Komponenten, bei pseudo-meromorphen Funktionen im Sinne von Kakutani (dies. Zbl. 17, 74). Durch Schnittoperationen wird das Bildgebiet auf ein einfach zusammenhängendes zurückgeführt, woraus dann leicht der Beweis folgt. S. Stoilow.

Ozaki, Shigeo, Isao Ono and Mitsuru Ozawa: Second principal theorem of the pseudo-meromorphic mapping in the three dimensional space. Sci. Reports Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A 4, 207—210 (1951).

In ziemlich analoger Weise wie in der vorstehend besprochenen Note wird hier eine ganz ähnliche Relation für den dreidimensionalen Fall hergeleitet.

S. Stoilow.

Ozaki, Shigeo, Isao Ono and Mitsuru Ozawa: On the pseudo-meromorphic mappings on Riemann surfaces. Sci. Reports Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A 4, 211—213 (1952).

Die in der an vorletzter Stelle besprochenen Note der Verff. bewiesene Relation wird hier auf Gebiete auf Riemannschen Flächen ausgedehnt. Es wird auch eine Relation zwischen der Eulerschen Charakteristik und der Blätteranzahl des Riemannschen Gebietes angegeben.

S. Stoilow.

Ozaki, Shigeo and Isao Ono: Second principal theorem of pseudo-meromorphic functions. Sci. Reports Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A 4, 214—221 (1952).

Für gewisse pseudo-meromorphe Funktionen — im zweidimensionalen sowie im dreidimensionalen Raum — werden Sätze [wie z. B. Scheibensatz und Verzweigungsindizesatz] aus dem Nevanlinna-Ahlforsschen Ideenkreis bewiesen. Dafür werden Ergebnisse, die Verff. in den drei vorstehend besprochenen Arbeiten erhalten haben, benutzt.

S. Stoilow.

Vekua, I. N.: Über eine Eigenschaft der Lösungen eines verallgemeinerten Systems von Cauchy-Riemannschen Gleichungen. Soobščeniia Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 14, 449—453 (1953) [Russisch].

Nouvelle démonstration du théorème suivant de l'A. (ce Zbl. 48, 337). Si la fonction complexe $U(z)$ est une solution de l'équation

$$\partial U / \partial \bar{z} + A U + B \bar{U} = 0$$

$A(z)$ et $B(z)$ étant complexes et continues dans un domaine borné T et si la dérivée aréolaire $\partial U / \partial \bar{z}$ [D. Pompeiu, Rend. Circ. mat. Palermo 33, 108—113 (1912)] est continue dans T , la fonction

$$\varphi(z) = U(z) \exp \left[- \frac{1}{\pi} \int_T \frac{A(t) U(t) - B(t) \bar{U}(t)}{U(t)(t-z)} dT \right]$$

est holomorphe dans T . La démonstration n'utilise plus les résultats de Carleman sur les systèmes elliptiques de premier ordre (ce Zbl. 7, 162) qui sont une conséquence simple du théorème de l'A.

I. Bernstein.

Hua, Loo-Keng (Chua, Lo-Ken): Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher. Über ein vollständiges Orthonormalsystem im hyperbolischen Raum der rechteckigen Matrizen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 775—777 (1953) [Russisch].

Der hyperbolische Raum \mathfrak{H} der rechteckigen (m, n) -Matrizen ist die Menge aller Matrizen $Z = (z_{jk})$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$, $z_{jk} \in C$, für welche die hermitesche Matrix $I - Z \bar{Z}'$ positiv definit ist. Ein vollständiges Orthonormalsystem von quadratintegrierbaren, holomorphen Funktionen erhält Verf. im Falle $m = n$ folgendermaßen: Es sei $D(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j < k} (x_j - x_k)$. Es werde ein beliebiges System f_1, \dots, f_n von ganzen Zahlen mit $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_n \geq 0$ vorgegeben. Es sei $b_j = f_j + n - j$. Ist $A_{f_1, \dots, f_n}(Z) = (a_{jk}^{f_1, \dots, f_n}(Z))$, $1 \leq j, k \leq N(f_1, \dots, f_n) = D(b_1, \dots, b_n) / D(n-1, n-2, \dots, 0)$, die Darstellung der Gruppe $\mathfrak{L}(n, C)$ mit den Signaturen f_1, \dots, f_n , so bilden die Funktionen $a_{jk}^{f_1, \dots, f_n}(Z) / Q^{1/2}_{f_1, \dots, f_n}$ mit

$Q_{f_1, \dots, f_n} = \pi^2 \prod_{j=1}^n \frac{b_j!}{(f_1, \dots, f_n)_j (n + b_j)!}$ bei allen möglichen Wahlen von f_1, \dots, f_n ein System der verlangten Art. Verf. berechnet die Kernfunktion dieses Ortho-

normalsystems zu: $K(Z, W) = v^{-1} \det(I - Z W')^{-2n}$ mit
 $v = \pi^n ((n-1)! \cdots 1!)^2 / ((2n-1)! \cdots 2! 1!).$

Daraus ergibt sich die „Cauchysche Integralformel“:

$$f(Z) = \frac{1}{\omega} \int \cdots \int_{\mathfrak{U}} \frac{f(U)}{\det(I - Z U')^n} \dot{U}$$

(\mathfrak{U} = Menge der unitären Matrizen von \mathfrak{R} , $\omega = \int \cdots \int \dot{U}$). Im Falle $n \neq m$ ist der Fouriersche Kern der Raumes \mathfrak{R} :

$$\frac{(m+n-1)! \cdots 1!}{\pi^{m,n} (n-1)! \cdots 1! (m-1)! \cdots 1!} \det(I - \bar{Z} \bar{W}')^{-n-m}.$$

W. Thimm.

Hua, Loo-Keng (Chua, Lo-Ken): Zur Theorie der Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen. Ein vollständiges Orthonormalsystem im hyperbolischen Raume der Hypersphären. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **93**, 983—984 (1953) [Russisch].

Als hyperbolischen Raum der Hypersphären bezeichnet Verf. das durch die Ungleichungen: $|z z'|^2 + 1 - 2 \bar{z} z' > 0$, $1 - |z z'|^2 > 0$ ($z = (z_1, \dots, z_n)$) bestimmte Gebiet \mathfrak{R} im C_n . Ein vollständiges Orthonormalsystem von quadratintegrierbaren, holomorphen Funktionen auf \mathfrak{R} wird aus einem zu der reellen n -dimensionalen Einheitshypersphäre gehörigen Orthonormalsystem abgeleitet. Zu diesem System gehört die Integralformel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int \cdots \int_{\mathfrak{Q}} \frac{f(W) \cdot \dot{W}}{[1 - 2 z \bar{W}' + (z z') (\bar{W} \bar{W}')]^{n/2}}.$$

wobei \mathfrak{Q} durch $z_j = e^{i\varphi} x_j$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, x_j reell, bestimmt wird und $\dot{W} = e^{iq} dq dx_1 \cdots dx_n$ ist. Es wird auf eine Anwendung bei der Ableitung des Hadamardschen Theorems hingewiesen.

W. Thimm.

Hua, Loo-Keng (Chua, Lo-Ken): Zur Theorie der komplexen Funktionen von mehreren Veränderlichen. Über ein vollständiges Orthonormalsystem im hyperbolischen Raum der symmetrischen und schiefsymmetrischen Matrizen. Doklady Akad. Nauk SSSR **101**, 29—30 (1955) [Russisch].

Ausgehend von zwei algebraischen Identitäten gewinnt Verf. eine Zerlegung bestimmter Darstellungsräume der Gruppe $\mathfrak{U}(n, C)$ in Unterräume, die eine Ableitung eines vollständigen Orthonormalsystems von quadratintegrierbaren holomorphen Funktionen für die im Titel genannten Räume erlaubt. Diese Räume sind wie in der im vorletzten Referat besprochenen Arbeit definiert, nur daß zusätzlich die Eigenschaft der Symmetrie bzw. der Schiefsymmetrie gefordert wird. Die zu diesen Orthonormalsystemen gehörenden Kernfunktionen ermöglichen die Aufstellung von Cauchyschen Formeln, die Verf. angibt (s. auch die oben zitierte Arbeit).

W. Thimm.

Roşculeţ, Marcel N.: Fonctions d'une variable hypercomplexe dans l'espace à n dimensions. Acad. Republ. popul. Române, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. **5**, 135—145, russ. und französ. Zusammenfassg. 144—145 (1953) [Rumänisch].

Roşculeţ, Marcel N.: Fonctions d'une variable hypercomplexe dans l'espace à N dimensions. Fonctions conjuguées. Acad. Republ. popul. Române, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. **5**, 415—422, russ. und französ. Zusammenfassg. 421—422 (1953) [Rumänisch].

Dans ces deux notes l'A. introduit une unité hypercomplexe définie par une équation algébrique de degré n quelconque et étudie les diviseurs de zéro et les fonctions

monogènes correspondantes ainsi que des formules du type de celles de Cauchy et de Green, les fonctions conjuguées. Il donne des applications à l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles qui généralise l'équation de Laplace.

S. Stoilow.

Modulfunktionen. Automorphe Funktionen. Fastperiodische Funktionen:

Myrberg, P. J.: Über die Picardsche Gruppe. Rend. Circ. Mat. Palermo. II. Ser. 2, 169—176 (1953).

Sätze, die vom Verf. früher für die Modulgruppe bewiesen wurden (vgl. etwa dies. Zbl. 1, 2), werden auf die Picardsche Gruppe G übertragen: Ist $S_n(K)$ die Menge der Bildkreise, die aus dem Kreis K der z -Ebene durch die Substitutionen aus G erhalten werden, so sind für fast alle K sämtliche Kreise der z -Ebene Häufungskreise der S_n . Es gibt Kreise K , für welche die Häufungsgebilde der $S_n(K)$ aus lauter Nullkreisen bestehen. Diese Kreise haben jeden Kreis als Häufungskreis. — Unterwirft man die Hermiteische Form $a x \bar{x} - b x \bar{y} - b \bar{x} y + c y \bar{y}$, a, c reell, den Substitutionen der homogenen Picardschen Gruppe, so erhält man nach Klein eine Gruppe G^* von reellen Kollineationen im dreidimensionalen Raum (a, b_1, b_2, c) , $b = b_1 + i b_2$, die nur für $D = b \bar{b} - a c < 0$ eigentlich diskontinuierlich ist. Verf. zeigt: Für fast alle Punkte in $D > 0$ liegen die Bilder in $D = 0$ überall dicht; es gibt eine in $D > 0$ überall dichte Menge von Punkten, deren Bilder ihre sämtlichen Häufungspunkte auf $D = 0$ haben. Diese Sätze sind den genannten Sätzen in der z -Ebene äquivalent und ergeben durch Übergang zur Polaren Aussagen der Ergodentheorie.

B. Schoeneberg.

Nicolescu, Miron: Fonctions polyharmoniques presque périodiques. Acad. Republ. popul. Române. Bul. şti. Sect. Şti. mat. fiz. 5, 273—283, russ. und französ. Zusammenfassg. 282—283 (1953) [Rumänisch].

Die von J. Favard stammende Definition der fastperiodischen harmonischen Funktionen wird auf folgende Weise für polyharmonische Funktionen verallgemeinert: Eine im Streifen $(a, b) = \{-\infty < x < \infty, a < y < b\}$ reguläre polyharmonische Funktion $u(x, y)$ μ -ter Ordnung heißt in diesem Streifen fastperiodisch, wenn sie als Funktion von x fastperiodisch ist, gleichmäßig in bezug auf y ($a < y < b$). Es ist bekannt (M. Nicolescu, dies. Zbl. 13, 206), daß jede im Streifen (a, b) reguläre polyharmonische Funktion μ -ter Ordnung in der Form $u(x, y) = \sum_{k=0}^{\mu-1} y^k \cdot u_k(x, y)$ dargestellt werden kann, wobei die Funktionen $u_k(x, y)$

in diesem Streifen harmonisch sind. Es wird gezeigt, daß wenn $u(x, y)$ fastperiodisch und ihre „harmonischen Komponenten“ $u_k(x, y)$ beschränkt sind, dann diese Funktionen $u_k(x, y)$ in jedem Streifen $[a_1, b_1] \times (a, b)$ fastperiodisch sind, also nach dem Satze von Favard eine Fouriersche Entwicklung besitzen. Hieraus ergibt sich dann eine „Fouriersche Entwicklung“ für die Funktion $u(x, y)$ selbst. — Im letzten Teil der Arbeit wird folgender Satz bewiesen: Es seien

$$f(x) \sim A_0 + \sum_n (A_n \cos \lambda_n x + B_n \sin \lambda_n x), \quad g(x) \sim A'_0 + \sum_n (A'_n \cos \mu_n x + B'_n \sin \mu_n x)$$

zwei fastperiodische Funktionen. Es existiert dann eine und nur eine Funktion $u(x, y)$, die im Gebiet $y > 0$ biharmonisch ist, beschränkte harmonische Komponenten besitzt, und die Bedingungen

$$y \Delta u \rightarrow 0, \quad u \rightarrow f(x), \quad \partial u / \partial y \rightarrow g(x) \quad (\text{für } y \rightarrow 0)$$

erfüllt. Ihre Fouriersche Entwicklung ist:

$$u(x, y) \sim A_0 + A'_0 y + \sum_n (A_n \cos \lambda_n x + B_n \sin \lambda_n x) (1 + \lambda_n y) e^{-\lambda_n y} \\ + y \sum_n (A'_n \cos \mu_n x + B'_n \sin \mu_n x) e^{-\mu_n y}. \quad B. Sz.-Nagy.$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

● Tricomi, Francesco Giacomo: Equazioni differenziali. (Serie di matematica.) 2. ed. Torino: Edizioni Scientifiche Einaudi 1953. 353 p. L. 4000.

In der neuen Auflage (1. Auflage s. dies. Zbl. 40, 193) sind außer kleinen Glättungen und Berichtigungen einige wesentliche Ergänzungen hinzugekommen, die

den Wert dieses besonders leicht lesbaren und doch recht weit führenden Buches noch erhöhen. Es handelt sich dabei zunächst um singuläre Punkte bei Systemen 1. Ordnung in der Ebene (Poincaréscher Index), ferner um die Ermittlung periodischer Lösungen bei Differentialgleichungen 2. Ordnung (geschlossene Charakteristiken im Phasenraum), insbesondere um Relaxationsschwingungen (Gleichungen von van der Pol und Liénard). Ferner ist eine früher im Anhang behandelte, vom Verf. (wie er jetzt selbst hervorhebt, geschichtlich nicht ganz einwandfrei) nach Fubini benannte asymptotische Methode für Differentialgleichungen 2. Ordnung jetzt in den Haupttext hineingearbeitet, und die Frage der Stabilität (Beschränktheit) der Lösungen von $y'' + Q(x)y = 0$ ($x \rightarrow -\infty$) wird unter Benutzung neuerer Arbeiten, besonders von Ascoli, vereinfacht und vertieft behandelt. Schließlich wird auf das asymptotische Verhalten der Laguerreschen Polynome für große Indices jetzt näher eingegangen und die Einzigkeit der Eigenwerte $n(n+1)$ der Legendreschen Differentialgleichung wird auf einfachere Weise nachgewiesen als früher.

Hermann Schmidt (Würzburg).

● **Bieberbach, Ludwig:** Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, auf funktionentheoretischer Grundlage dargestellt. (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band LXVI.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1953. IX, 338 S.

Es ist sehr zu begrüßen, daß die Leitung der Sammlung einem vor Jahren vom Ref. gemachten Vorschlag gefolgt ist, an Stelle des lange vergriffenen, nur allzuvielen verschiedenen Gebiete der Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen auf knappem Raum berührenden älteren Lehrbuches des Verf. einen Band über die funktionentheoretische Behandlung der gewöhnlichen Differentialgleichungen treten zu lassen, wie ein solcher seit den Werken von Schlesinger etwa ein Menschenalter in deutscher Sprache nicht erschienen ist, und man wird dem verdienten Verf. Dank wissen, daß er die anspruchsvolle Aufgabe übernommen hat. Inzwischen hat er in rastloser Arbeit ja auch für die reelle Theorie einen weiteren Band geschaffen. Etwa das erste Drittel unseres Buches ist im wesentlichen nicht-linearen (genauer: nicht notwendig linearen) Gleichungen gewidmet, der Rest den linearen, abgesehen von dem letzten der ohne größere Zusammenfassungen nebeneinander gestellten zwölf Paragraphen; in diesem werden nicht-lineare Gleichungen höherer Ordnung behandelt. Die Darstellung ist in vielen Teilen auf leichte Zugänglichkeit für den Anfänger eingestellt; das macht sich besonders bei den linearen Gleichungen geltend, wo dann oft sogar auf einfache formale Hilfsmittel zur kürzeren und übersichtlicheren Gestaltung unvermeidlicher Rechnungen verzichtet wird, wie etwa lineare Differentialoperatoren (selbst der Operator $z D_z$, der so viele Rechnungen erleichtert, tritt nicht auf!) oder Matrizen; letztere kommen dann, besonders an fortgeschrittenen Stellen, doch zum Vorschein, aber unsystematisch und ohne die beherrschende Rolle zu spielen, die ihnen nach Auffassung des Ref. bei den linearen Differentialsystemen zukommt. So beschränkt sich hier die Darstellung im wesentlichen auf den Fall von $n = 2$ Gleichungen 1. Ordnung, und die Theorie der einzelnen Gleichungen n -ter Ordnung ist nicht in die der Systeme mit n Unbekannten eingebaut. Überhaupt scheint es, daß die Beziehungen zu der heute so aktuellen algebraischen Auffassung der Differentialgleichungen bewußt in den Hintergrund gedrängt sind; selbst der Riemannsche Klassen- bzw. Poincarésche Artbegriff, deren Einführung von dem Kleben an der einzelnen Gleichung (entsprechend der Entwicklung in der Theorie der algebraischen Gleichungen) befreit, ist nicht erwähnt. Asymptotische Darstellungen sind absichtlich (um anderen Werken nicht vorzugreifen) nur kurz gestreift bzw. an Beispielen erörtert. Vermutlich im Zusammenhang damit sind auch Darstellungen der Lösungen durch Parameterintegrale nur in wenigen Spezialfällen berücksichtigt, was man wegen der Beziehungen zum Gedankenkreis der Funktionalanalysis bedauern mag. Demgegenüber ist der Gesichts-

punkt der direkten funktionentheoretischen Untersuchungen der Lösungen überall mit großer Sorgfalt und unter Berücksichtigung einer Fülle von oft sehr tiefgehenden Einzelfragen durchgeführt. Besonders wertvoll erscheint die ausführliche Behandlung der nichtlinearen Gleichungen, bei denen insbesondere der wesentliche Inhalt vieler nicht leicht lesbarer oder mehr oder weniger vergessener älterer Arbeiten neu dargestellt ist; andererseits sind zahlreiche neuere und neueste Untersuchungen, z. B. über Existenz ausgezeichneten Lösungen an singulären Stellen, über ganze Lösungen, über Wachstumseigenschaften und Wertverteilung berücksichtigt, wie sie etwa von Perron, Rellich, Wittich angestellt wurden. In diesem Zusammenhang sind auch Elemente der Nevanlinnaschen Theorie mit entwickelt. Mit Literaturangaben ist Verf., wie er ausdrücklich betont, sparsam umgegangen; es sind aber doch sehr viele Namen genannt (im Text mehr als im Namenverzeichnis, wo z. B. Schlesinger fehlt); leider aber sind die bibliographischen Angaben sehr ungleichmäßig, so daß der Leser Mühe haben wird, vor allem ältere Literatur danach zu finden (die wenigstens bis 1907 reichende Bibliographie von Schlesinger (J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 18, 193—254 (1909)) ist nicht erwähnt!). Es folge nun eine Übersicht mit kleinen Randbemerkungen. § 1. Die grundlegenden Existenzsätze: Schrittweise Näherungen, Majorantenmethode, Abhängigkeit von Parametern. § 2. Singuläre Stellen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung: Satz von Painlevé über Unmöglichkeit wesentlicher Singularitäten der Lösungen bei regulärer rechter Seite in $w = f(w, z)$. Vorbemerkungen über außerwesentlich singuläre Stellen 2. Art bei $f(w, z)$, denen dann zwei weitere Paragraphen gewidmet sind, die sehr weit in die Diskussion führen. § 3. Das Verhalten der Lösungen von $w' = (aw - b)/(cw - d)$ in 0. § 4. Außerwesentlich singuläre Stellen 2. Art: Methode der Transformation auf die Form des § 3 mit Hilfe partieller Differentialgleichungen für die Abbildungsfunktionen. Briot-Bouquetsche Differentialgleichungen. § 5. Differentialgleichungen 1. Ordnung im Großen: Feste und bewegliche Singularitäten.

[Ob die vom Verf. S. 82/83 vorgeschlagene Neufassung der Definition einer beweglichen Singularität einer Lösung nun wirklich befriedigt, muß wohl dahingestellt bleiben. Wie sich etwa das vorletzte Beispiel von S. 9 hier einordnet, erscheint zweifelhaft.]

Der Satz von Malmquist über die ausgezeichnete Bedeutung der Riccatischen Gleichung gibt Anlaß zur Verwendung neuerer Methoden der Wertverteilungslehre (Yosida). § 6. Lineare Differentialgleichungen im Kleinen. Sehr eingehende Diskussion der Bestimmtheitsstellen für Gleichungen n -ter Ordnung (Nachweis, daß jede „formale Lösung“ konvergieren muß!).

[Die Bemerkung S. 113, auf geradlinigen Wegen habe jede Lösung von $z^2 w'' + z p_1 w' + p_2 w = 0$ (p_1, p_2 konstant) für $z \rightarrow 0$ einen Grenzwert, trifft schon im Falle $p_1 = p_2 = 1$, $w = z^i$, wegen $r^i = \cos \log r + i \sin \log r$ für die reelle positive Achse nicht zu. Für nichtgeradlinige Wege sind (sogar für den Betrag!) nicht nur im logarithmischen Falle, wie angegeben, u. U. Einschränkungen für den Weg nötig, da z. B. $|z^{-1}| = e^{\theta}$ bei $r_n \rightarrow 0$, φ_n beliebig, jede Zahl ≥ 0 approximieren kann.]

Integrale, die sich an wesentlich singulären Stellen bestimmt verhalten (Perron). Für Systeme sei (im Gegensatz zu S. 171, Ende des 1. Absatzes), wenigstens was reguläre Lösungen betrifft, auf Lettenmeyer, S. -Ber. Bayer. Akad. Wiss., München, math.-naturw. Abt. 1926, 287—307 und eine anschließende Note des Ref. (ibid. 1931, 85—90) hingewiesen.

[Die kritische Bemerkung S. 178 über ein angebliches Vergessen einer Bedingung (nämlich: $k \neq 0$) bei Perron, Math. Z. 3, 161—171 (1919) ist unbegründet, da $k \neq 0$ trivialerweise aus der ausdrücklich durch die Worte „in diesem Falle“ S. 161 gemachten Voraussetzung folgt, daß die Differentialgleichung (1) nicht vom Fuchschen Typ (an der Stelle a) sei.]

Äquivalente singuläre Punkte (Birkhoff): hier hat sich inzwischen herausgestellt [Gantmacher, Matrizenrechnung II, Berlin 1959 (dies. Zbl. 79, 11) S. 129/130 und Masani, Proc. Amer. math. Soc. 10, 696—698 (1959)], daß der zitierte Satz

von Birkhoff in dieser Allgemeinheit unrichtig ist. § 7. Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse: Besonders gründliche Behandlung der hypergeometrischen Differentialgleichung mit Berücksichtigung der Ausnahmefälle, der Übergangsrelationen, der Integraldarstellungen nach Euler und Barnes, der Fälle algebraischer Integrierbarkeit. Hier wäre ein Hinweis auf die Darstellungen von Goursat (*Leçons sur les séries hypergéométriques*... dies. Zbl. 14, 62; *Intégrales algébriques*, dies. Zbl. 22, 131) und Kampé de Fériet (*La fonction hypergéométrique*, dies. Zbl. 17, 305) doch angebracht gewesen. § 9. Die Besselsche Differentialgleichung: Weniger vollständig, was die partikulären Integrale und ihre Darstellungen und Beziehungen betrifft, enthält dafür Liouville-Rittsche Sätze über elementare Integrierbarkeit. § 10. Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse mit vier singulären Punkten: Erstmaliges Auftreten eines akzessorischen Parameters gibt Anlaß, den Zusammenhang mit der Uniformisierungstheorie herzustellen. Bei Gelegenheit eines Satzes von Plemelj über Parameterabhängigkeit von Lösungen dürfte auf die in der gleichen Gedankenrichtung darüber weit hinausgehenden Arbeiten von Schäfke hingewiesen werden. § 11. Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten: Ljapunovscher Stabilitätssatz, Gleichungen mit doppeltperiodischen Koeffizienten. § 12. Einiges über nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung: Die Überschrift führt irre, da die ausgeführten Teile sich auf den Hölderschen Satz über die Gamma-Funktion sowie einen Hurwitzschen Satz arithmetischer Natur für algebraische Differentialgleichungen (Gegenstück zum Satze von Eisenstein über algebraische Funktionen) beziehen, während die Painlevéschen Transzendenten, die Differentialgleichungen 2. Ordnung genügen, wie die anschließenden Untersuchungen von Wittich im Zusammenhang mit der Wertverteilungslehre nur kurz gestreift werden: letztere gehen überdies z. T. auch auf Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Hermann Schmidt (Würzburg).

Markus, L.: Invariant measures defined by differential equations. *Proc. Amer. math. Soc.* 4, 89—91 (1953).

Soit S un système différentiel de classe C^∞ dans le plan, sans singularités, admettant une intégrale première $\psi \in C^\infty$. La mesure invariante μ associée à S n'est pas nécessairement continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Mais si S et ψ sont analytiques le comportement est régulier.

G. Reeb.

Franchini, Lucia: Criteri d'unicità per gli integrali di un sistema di equazioni differenziali ordinarie. *Ann. Univ. Ferrara, n. Ser., Sez. VII* 2, 53—69 (1953).

L'A. estende, generalizzandoli, noti criteri di unicità concernenti il problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine e del tipo normale (F. Cafiero, questo Zbl. 32, 411), al problema di Cauchy relativo ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine e del tipo normale. I teoremi stabiliti, formalmente complessi, sono molto generali. Alcuni di essi assorbono un criterio di G. Zwirner [*Rend. Sem. mat. Univ. Padova* 11, 90—96 (1940)] relativo allo stesso problema.

F. Cafiero.

Dahmen, Gert: Die elementare Auflösbarkeit der speziellen Riccatischen Differentialgleichung. *Ann. Univ. Saraviensis* 2, 75—81 (1953).

Es wird die elementare Integrierbarkeit gewisser Klassen gewöhnlicher Differentialgleichungen mittels der Theorie der algebraischen Funktionen untersucht. Man gibt besonders die Beweise folgender Sätze an: Die Riccatische Differentialgleichung $y' + a y^2 = c x^m$ ist dann und nur dann elementar integrierbar, wenn $m = -4n/(2n-1)$ (n eine ganze Zahl) ist. (Satz von Liouville.) Die Besselsche Differentialgleichung $v'' + z^{-1} v' + (1 - m^2 z^{-2}) v = 0$ ist dann und nur dann elementar integrierbar, wenn $m = \pm (n \pm \frac{1}{2})$ ist.

M. Laitoch.

Jeffreys, Harold: On approximate solutions of linear differential equations. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 49, 601—611 (1953).

The author discusses a technique for finding asymptotic expressions, when h is large, for the solutions of differential equations of the type

$$d^2y/dx^2 = (h^2\chi_0(x) + h\chi_1(x) + \chi_2(x))y.$$

The emphasis is on approximations for which the relative error is uniformly $O(1/h)$ in large complex x -domains E , particularly in unbounded ones. If $\chi_0(0) \neq 0$ this is achieved by reducing the differential equation to the form $d^2z/d\xi^2 - h^2z = g(\xi, h)z$ by means of a transformation of the form

$$\xi = \int_0^x \left(\chi_0 + \frac{\chi_1}{h} + \frac{\chi_2}{h^2} \right)^{1/2} dx, \quad y = \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^{-1/2} z,$$

where $\chi_2(x)$ must be chosen so that $g(\xi, h)$ satisfies certain stated conditions in E . If these conditions are satisfied, a fundamental system $z = Z_j(x, h)$, $j = 1, 2$, of the transformed differential equation can be shown—by means of a transformation into a Volterra integral equation—to be approximately equal to $e^{\pm h\xi}$, in E . If $\chi_0(0) = 0$, but $\chi_1(0) \neq 0$, a transformation defined by $\xi'^2 \xi = \chi_0 + \chi_1/h + \chi_2/h^2$ may be used, which permits, in analogous fashion, the approximation of the solutions by those of Airy's equation. The paper does not contain a general method for the calculation of a function $\psi_2(x)$ for which $g(\xi, h)$ has the required properties.

W. Wasow (Math. Reviews 15, 223).

Taam, Choy-Tak: On the solutions of second order linear differential equations. Proc. Amer. math. Soc. 4, 876—879 (1953).

Taam, Choy-Tak: Non-oscillation and comparison theorems of linear differential equations with complex-valued coefficients. Portugaliae Math. 12, 57—71 (1953).

The author generalizes to equations $(P(x)W')' + Q(x)W = 0$ with complex-valued $P(x)$ and $Q(x)$, nonoscillation and comparison theorems, obtained by Hartman and Wintner in the real case. Other results are also given. The theorems are derived from a fundamental one, which states that from the existence in a given interval of an absolutely continuous solution of an associated "Riccati-inequality" there follows the existence of a zero-free solution of the original equation in that interval. The idea of using such an inequality goes back to Wintner. G. Borg.

Mikolajski, Z.: Sur les mouvements asymptotiques d'un point matériel mobile dans le champ des forces repoussantes. Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III 1, 11—13 (1953).

La méthode topologique de Ważewski est utilisée pour étendre au cas non linéaire un résultat de Wintner qui affirme l'existence d'une famille à n paramètres de trajectoires asymptotiques de l'équation $\ddot{X} = A(t)X$ où $X'AX \geq 0$.

G. Reeb.

Saichin, A. et A. Halanay: Sur l'équation de mouvement du train. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. București, Ser., Ști. Natur. 2, Nr. 3, 52—60, russ. u. französ. Zusammenfassg. 60—61 (1953) [Rumänisch].

Les AA. généralisent des résultats dus à N. Lusin au sujet de l'équation du mouvement du train établie par Żukovskij. Soit $du/ds = \varphi(u) + q(s)$ l'équation différentielle du mouvement du train où l'on suppose que a) φ et q sont continues pour $u \geq 0$, $-\infty < s < \infty$; b) $|\varphi(s)| \leq M$ ($M > 0$); c) quelque soient $u \geq 0$ et $\eta > 0$, on a $\varphi(u + \eta) - \varphi(u) \leq 0$; d) il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\epsilon \geq \delta$ et $u \geq 0$ on ait $\varphi(u + \epsilon) - \varphi(u) < 0$; e) $\varphi(0) > M$ et il existe $u_0 > 0$ tel que $\varphi(u_0) < -M$. Alors 1°. La distance entre deux solutions arbitraires, pour le même s , devient plus petite que δ pour s suffisamment grand. 2°. Toute solution finit par rentrer dans la bande $0 \leq u \leq u_0 + \delta$. 3°. Il existe une solution inférieure et une solution supérieure définies pour $-\infty < s < \infty$ et qui sont contenues dans la bande $0 \leq u \leq u_0$ et leur différence est plus petite que δ . On indique certains cas particuliers où toutes les solutions s'approchent asymptotiquement (δ peut être choisi alors aussi petit que l'on veuille). Si les conditions indiquées sont vérifiées et si q est périodique, l'équation donnée admet une solution périodique au moins (même deux solutions périodiques au moins si $\delta \neq 0$), ce résultat étant une conséquence immédiate d'un théorème de Massera (ce Zbl. 38, 250). Les AA. examinent ensuite le cas où φ est presque-

périodique; si l'équation admet une solution $u = u(s)$ bornée pour $s \geq s_0$, ($m \leq u(s) \leq M$) et si dans l'intervalle fermé $[m, M]$ on a $-K(u_2 - u_1) \leq \psi(u_2) - \psi(u_1) \leq -k(u_2 - u_1)$ pour $u_2 > u_1$, ($0 \leq k \leq K$) l'équation admet une solution presque-périodique. Pour prouver ce théorème les AA. démontrent que la solution $u = u(s)$ est asymptotiquement presque-périodique (dans le sens de Fréchet) et que la composante presque-périodique de $u = u(s)$ vérifie l'équation du mouvement du train. Enfin si a) ψ est continue pour $u > 0$ et q presque-périodique; b) $\psi(0) + \varphi(s) \leq M$, $q(u_0) + q(s) \leq -M$ ($M > 0$, $u_0 > 0$); c) $\psi(u_2) - \psi(u_1) \leq K(u_2 - u_1)^n$ ($K > 0$, $n \geq 1$, $u_2 > u_1$); l'équation du mouvement du train admet dans $[0, u_0]$ une solution presque-périodique unique. I. Barbălat.

Halanay, A.: Solutions presque-périodiques de l'équation de Riccati. Acad. Republ. popul. Române, Studii Cerc. mat. 4, 345—353, russ. u. französ. Zusammenfassg. 353, 354 (1953) [Rumänisch].

L'A. étudie l'équation (1) $y' + y^2 + p(t) = 0$, $p(t)$ étant presque-périodique. Si $p(t) \leq 0$, (1) a deux solutions presque-périodiques. Si (1) a deux solutions presque-périodiques, l'équation (2) $x'' + p(t)x = 0$ a deux solutions linéaires indépendantes de la forme $x_1 = e^{i\lambda t} \Phi_1(t)$, $x_2 = e^{-i\lambda t} \Phi_2(t)$, $\Phi_k(t) = \exp \int_{t_0}^t \lambda_k(t) dt$ ($k = 1, 2$) où λ_k sont presque-périodiques à valeurs moyennes nulles. L'équation $y' + y^2 - \lambda - q(t) = 0$, avec $\lambda > 0$, $\lambda > \sup Q(t) - \inf Q(t)$, où $Q(t) = \int q(t) dt$ et $q(t)$ est presque-périodique, a deux solutions presque-périodiques. M. Haimovici.

Halanay, A.: Nouveaux critères d'existence des solutions périodiques pour l'équation des oscillations non linéaires forcées. Acad. Republ. popul. Române, Bul. ști., Sect. Ști. mat. fiz. 5, 373—391, russ. und französ. Zusammenfassg. 379—380 (1953) [Rumänisch].

La solution de l'équation $dz/dy = a/z - y$, où $a \geq 1/8$, qui passe par le point $a/z_0, z_0, z_0 \rightarrow 0$, tend vers l'origine si $y \rightarrow 0$. À l'aide de cette remarque, complémentaire en un certain sens d'un lemme utilisé par A. F. Filippov (voir G. Sansone e R. Conti, Equazioni differenziali non lineari, Roma 1956, pp. 395—405), de la transformation de Liénard et de la méthode du point fixe de Brouwer, l'A. trouve deux critères d'existence de solutions périodiques pour l'équation $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t)$, $e(t + \omega) = e(t)$, dont voici l'énoncé du premier: Soit $E > |e(t)|_1$, 1. s'il existe x_0 tel que $g(x_0) + E = 0$ et $g(x) + E > 0$ pour $x > x_0$ ainsi que $x_1 > x_0$ tel que pour $x > x_1$, $g(x) - E > k > 0$; 2. si

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi, \quad G(x) = \int_{x_0}^x (g(\xi) + E) d\xi$$

alors pour $x_0 \leq x \leq x_1$ l'on a $F(x) \geq 1/8 G(x)$, où $x_1 = x_0 + L^2/k$, $L = 2M'/(E + M)$, $M' = \max |g(x)|$ pour $x \in [x_0, x_1]$ et $M' = \max |F(x)|$ pour $x \in [x_0, x_1]$. Dans ces conditions, l'équation différentielle admet une solution périodique au moins, de la période ω . I. Barbălat.

Barbălat, I.: Solutions bornées et solutions périodiques pour certaines équations différentielles non linéaires du second ordre. Acad. Republ. popul. Române, Bul. ști., Sect. Ști. mat. fiz. 5, 393—402, russ. und französ. Zusammenfassg. 400—402 (1953) [Rumänisch].

On considère l'équation $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = e(t)$. On suppose: $g(x)/x \leq 1$ pour $|x| > a$, $f(x, y)|y| \rightarrow \infty$ pour $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, $|y| > a$; il existe $M > 0$ tel que $f(x, y) > -M$ dans les régions $x > a$, $0 \leq y \leq a$, $x = -a$, $-a \leq y \leq 0$. Alors il existe $k > 0$ tel que pour toute solution on a $|x(t)| \leq k$, $|\dot{x}(t)| \leq k$ pour $t > T$, le nombre T dépendant de la solution. Si $e(t)$ est périodique, il s'en suit l'existence d'une solution périodique. A. Halanay.

Barbălat, I.: Solutions bornées et solutions périodiques pour certaines équations différentielles non linéaires du second ordre. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Ști., Sect. ști. mat. fiz. 5, 503—512, russ. und französ. Zusammenfassg. 512—515 (1953) [Rumänisch].

L'A. considère l'équation (1) $\ddot{x} + f(x, \dot{x}) \dot{x} + g(x) = e(t)$ où: 1. e, f, g sont continues pour toutes les valeurs de leurs arguments, e étant bornée; 2. il existe $a > 0$, tel que $xg(x) > 0$ pour $|x| > a$ et $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |g(x)| = \infty$; 3. il existe $m > 0$ et $M > 0$, tels que $f(x, y) > m$ pour

$|x| > a$, $|y| > a$, $f(x, y) < -M$ pour $x > a$ et $0 \leq y \leq a$ ou $x < -a$ et $-a \leq y < 0$ ou $|x| \leq a$ et $|y| \geq a$. Dans ces conditions: a) il existe une constante $k > 0$, dépendant des fonctions f, g, e , telle que pour toute solution de (1) il existe τ tel que pour $t \geq \tau$, on ait $|x(t)| < k$, $|\dot{x}(t)| < k$; b) pour e périodique (ω étant la plus petite période positive) et f, g telles que l'unicité et la continuité des solutions soient assurées pour des conditions initiales données, il y a au moins une solution périodique de période ω . La condition 3. peut être remplacée par la suivante: il existe $m > 0$, $M > 0$ et $0 \leq \alpha < 1$ tels que: $f(x, y)y^\alpha > m$ pour $|x| > a$ et $|y| > a$; $f(x, y)|y| > -M$ pour $x > a$ et $0 \leq y \leq a$ ou $x < -a$ et $-a \leq y \leq 0$; $f(x, y) > -M$ pour $|x| \leq a$ et $|y| > a$. M. Haimovici.

Harada, Shigeharu: An existence proof of the generalized Green function. Osaka math. J. 5, 59—63 (1953).

Verf. konstruiert in expliziter Form die „Greensche Funktion in erweitertem Sinne“ nach dem bekannten Courantschen (Courant-Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik, I. S. 280) Gesichtspunkt für eine selbstadjungierte Differentialgleichung 2. Ordnung mit sich auf beide Endpunkte beziehenden Bedingungen.

G. Cimmino.

Bergmann, Howard G.: The boundary layer problem for certain non-linear ordinary differential equations. Compositio math. 11, 119—169 (1953).

Verf. untersucht die in der Biegetheorie von Kreisplatten auftretende nicht-lineare gewöhnliche Randwertaufgabe für die beiden Funktionen $p(x)$ und $q(x)$:

$$p_{xx} = \frac{1}{2} q^2, \quad k q_{xx} + p q = 0, \quad p(-1) = p_1, \quad p(+1) = p_2, \quad q_x(\pm 1) = 0.$$

k, p_1 und p_2 sind gegebene Konstanten. Unter Bezugnahme auf die Variationsrechnung werden zunächst für den Fall $k > 0$, $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ Existenz- und Eindeigkeitstheoreme bewiesen. Verf. wendet dann auf das Problem eine gewisse Strecktransformation an und untersucht das asymptotische Verhalten der Lösungen für $k \rightarrow 0$. Die Grenzlösung wird in eine konvergente Potenzreihe entwickelt. Nach der Rücktransformation läßt sich das Verhalten der Lösung für $k \rightarrow 0$ im Bereichsinnern diskutieren und eine explizite Darstellung der Grenzlösung angeben. Die in den Fällen $p_1 > 0$, $p_2 < 0$ und $p_1 < 0$, $p_2 < 0$ erforderlichen Modifikationen werden zum Schluß der Arbeit besprochen.

G. Bertram.

Bremekamp, H.: Sur la théorie de Sturm-Liouville. Anniversary Vol. appl. Mechanics dedicated to C. B. Biezeno, 38—56 (1953).

Verf. leitet den bekannten Sturmischen Satz über die Existenz unendlich vieler Eigenwerte eines regulären Differentialoperators durch eine leichte Modifikation des von Picard in seinem *Traité d'Analyse* angewandten Verfahrens her. Er legt dabei Wert darauf, die Differentialgleichung in ihrer ursprünglichen Form zu lassen und keine Transformation (etwa auf die Schwartzsche Normalform, wie sonst üblich) vorzunehmen.

F. Penzlin.

Schaefer, Hermann: Reduktion eines linearen Eigenwertproblems 2. Ordnung mit Hilfe einer bekannten Eigenfunktion. Abh. Braunschweig. wiss. Ges. 5, 141—151 (1953).

L'A. considera un'equazione differenziale ordinaria del 2° ordine lineare del tipo: (1) $(d/dx)(S(x)q') + \lambda \theta(x)q = 0$, $0 \leq x \leq l$ con $S(x)$ e $\theta(x)$ differenziabili e mai nulli, cui associa la condizione ai limiti: (2) $q(0) = q(l) = 0$ e mostra come la conoscenza di una autosoluzione q_0 del problema (1) (2), relativa ad un autovalore λ_0 , permetta di ridurre tale problema ad un altro di forma analoga: (1*) $(d/dx)(S^*(x)q'^*) + \lambda \theta^*(x)q^* = 0$, (2*) $q^*(0) = q^*(l) = 0$ che ha i medesimi autovalori del problema (1) (2) escluso λ_0 . A tale riduzione l'A. giunge osservando che ogni autosoluzione di (1) (2) indipendente da q_0 soddisfa la condizione d'ortogonalità: (3) $\int_0^l \theta(x) q_0(x) q(x) dx = 0$ e che pertanto si ottiene la riduzione desiderata se si opera una trasformazione di q in una nuova q^* tale che l'integrando che compare nella (3) si muti nel differenziale totale di una funzione nulla agli estremi; infatti in tal modo il problema (1) (2) (3) il quale ha i medesimi autovalori di (1) (2) escluso λ_0 viene ad assumere una forma analoga a quella

del problema (1) (2) cioè di un problema ai limiti per un'equazione differenziale senza ulteriori condizioni di ortogonalità. Sfruttando la relazione: $(\lambda - \lambda_0) \theta q_0 q' = (d/dx) [S(q q'_0 - q' q_0)]$, dedotta dalla (3), si vede che la trasformazione $q^* = q - (q_0' q'_0) q'$ gode della anzidetta proprietà. Inoltre questa trasformazione muta la (1) nella (1*) ove, posto $M = S q'$ e $M_0 = S q'_0$, sia $S^* = S [(M_0 q') (M'_0 q_0)]$ e $\theta^* = \theta [(M_0 q'_0) (M'_0 q_0)]$. Infine si dimostra che questa trasformazione è canonica nel senso della Meccanica Analitica. Questo medesimo procedimento viene poi applicato al caso di una equazione alle differenze finite del 2° ordine: $1[(c/l_k) - 1] q_{k-1} + \lambda \theta_k q_k = 0$, $k = 0, \dots, n$ la quale è l'equazione del moto di una catena vibrante costituita da masse concentrate in un numero finito di punti (la massa θ_k è concentrata nel punto di ascissa l_k). Dei risultati ottenuti in questo caso viene data anche un'interpretazione geometrica. *L. de Vito.*

Bloch, A. S.: Über die Bestimmung einer Differentialgleichung nach ihrer speziellen Matrixfunktion. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 209—212 (1953) [Russisch].

Zu gegebener Spektralmatrix, nicht spezieller Matrix, wie der russische Titel angibt, soll für $-\infty < x < +\infty$ eine Differentialgleichung $y'' + (\lambda - q(x)) y = 0$ aufgestellt werden. Zum Begriff Spektralfunktion und zur Methode der Lösung der Aufgabe vgl. das ausführliche Referat über Gel'fand und Levitan, dies. Zbl. 42, 327. *Adam Schmidt.*

Yosida, Kôzaku: Correction to my paper "On Titchmarsh-Kodaira's formula concerning Weyl-Stone's eigenfunction expansion" in Nagoya math. J. 1, 49—58 (1950). Nagoya math. J. 6, 187—188 (1953).

Besprechung der im Titel genannten Arbeit s. dies. Zbl. 38, 248.

Bruijn, N. G. de: The difference-differential equation $F'(x) = e^{\alpha x + \beta} F(x-1)$. I, II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 449—458, 459—464 (1953).

Verf. wendet sich einer Verallgemeinerung der von Mahler behandelten Differenzen-Differentialgleichung (I) $f'(\xi) = f(q\xi)$ (mit $0 < q < 1$) zu, die nach der Transformation $\xi = q^x - \epsilon$ mit der Gleichung (II) $F'(x) = e^{\alpha x + \beta} F(x-1)$ identisch ist, sofern in (II) $\alpha > 0$ und β reell vorgeschrieben wird. Die Lösungen von (II) werden hier für $\alpha > 0$ und beliebig komplexe β im reellen x -Bereich behandelt. Mit Methoden, die in der Theorie der linearen Differentialgleichungen üblich sind (unter anderem wird die adjungierte Gleichung (III) $G'(x) + e^{\alpha x + \beta} G(x+1) = 0$ und eine Greensche Funktion definiert), findet Verf. einige interessante Ergebnisse: So gibt er explizite als Laplace-Integral eine mit den Parametern α und β festgelegte Funktion $F_0(x)$ an, aus der die Funktionen $F_n(x) = F_0(x + 2\pi ni x^{-1})$ (für $n = \pm 1, \pm 2, \dots$) gebildet werden, mit denen sich jede beliebige Lösung von (II) als endliche oder unendliche lineare Kombination darstellen läßt. Durch Betrachtungen über das Verhalten von $F_0(x)$ und die Adjungierte $G_0(x)$ für $x \rightarrow \infty$ kommt er zu Aussagen über das Verhalten jeder beliebigen Lösung von (II) und (III) im Unendlichen. *H. Töpfer.*

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Lukomskaia, M. A.: Die Lösung gewisser Systeme von partiellen Differentialgleichungen mittels des Einschließens in einen Zyklus. Priklad. Mat. Mech. 17, 745—747 (1953) [Russisch].

Sind u und v Lösungen des Systems $c_i u_x + d_i v_y = a_i u_y + b_i v_x$, ($i = 1, 2$), so wird die komplexwertige Funktion $f(x + iy) = u + iv$ ebenfalls als Lösung

angesehen. Sind $U = \int_{x_0, y_0}^{x, y} [(a_2 u + b_2 v) dx + (c_2 u + d_2 v) dy]$

und $V = \int_{x_0, y_0}^{x, y} [(a_1 u + b_1 v) dx + (c_1 u + d_1 v) dy]$

unabhängig vom Integrationsweg und ist das „ Σ -Integral“ $F = U + iV$ selbst wieder Lösung des Systems, so heiße dieses in einem Zyklus ersten Grades eingeschlossen. Das ermöglicht die Darstellung der Integrale als verallgemeinerte

Potenzreihen mit Methoden aus der Theorie der pseudoanalytischen Funktionen. (Vgl. Bers, dies. Zbl. 36, 53; Bers und Gelbart, dies. Zbl. 29, 400.) Verf. gibt drei Beispiele hierher gehöriger Systeme. *Adam Schmidt.*

Loewner, Charles: Generation of solutions of systems of partial differential equations by composition of infinitesimal Baecklund transformations. *J. Analyse math.* 2, 219—242 (1953).

$\zeta = (\xi, \eta)$ und $\zeta' = (\xi', \eta')$ seien Zweivektoren und A, B, C, D, W 2×2 -Matrizen. Die Differentialgleichung (A) $\zeta'_x = W \zeta_x - A \zeta + C \zeta'$, $\zeta'_y = W \zeta_y + B \zeta + D \zeta'$ stellen eine Baecklund-Transformation dar, wenn aus jeder Lösung des Systems (B) $\zeta_x = H \zeta_y$ vermöge dieser Transformation eine Lösung des Systems (B') $\zeta'_x = H' \zeta'_y$ hervorgeht. ζ' ist in diesem Fall aus ζ durch Quadraturen zu erhalten [vgl. Loewner, Techn. Note 2065, Nat. Advisor. Committee Aeronaut., Washington (1950)]. Stellt man die Integrabilitätsbedingungen von (A) auf und setzt die Koeffizienten von ζ und ζ' gleich Null und führt man dann die Beziehungen (B), (B') ein, so entsteht eine Reihe von Gleichungen für die Matrizen $A, \dots, D, W, H, H', \dots$ u. a. $H' = WHW^{-1}$. Infinitesimale Baecklund-Transformationen erhält man dadurch, daß man alle vorkommenden Größen noch von einem Parameter t abhängen läßt und $\zeta' = \zeta + \zeta_t dt$, $H' = H + H_t dt$ und $W = I + \Omega$ setzt ($I =$ Einheitsmatrix). Für diese infinitesimalen Transformationen erhält man besonders einfache Darstellungen der Koeffizienten. Man kann nun hoffen, durch geeignete Transformation ein komplizierteres System von Differentialgleichungen (B) in ein einfacheres (B') zu transformieren. Z. B. tritt in der Hodographenmethode der Gasdynamik ein System (B) mit $H = \begin{pmatrix} 0 & h \\ -h^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ auf. Verf. fragt nach Baecklund-Transformationen, die sich aus infinitesimalen Transformationen zusammensetzen, so daß für $t \rightarrow \infty$ $H' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ wird, was den Cauchy-Riemannschen Gleichungen entsprechen würde. Dies gelingt in geschlossener Form für ein spezielles $h(u)$. Für allgemeinere Funktionen $h(u, v)$ werden Ansätze diskutiert. Vgl. auch G. Springer, dies. Zbl. 72, 307.

C. Heinz.

Veltkamp, G. W.: Integration von Systemen von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen mittels Charakteristiken mit Erläuterung an Hand eines Beispiels aus der Hydraulik. *Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1953-0*, 19 S. (1953) [Holländisch].

Wiedergabe eines Vortrags über die Charakteristikentheorie eines quasilinearen hyperbolischen Systems mit zwei abhängigen und zwei unabhängigen Variablen und über ihre Anwendung auf die instationäre Strömung von Flüssigkeiten oder Gasen in Kanälen bzw. Rohren. Entstehung von Stoßwellen. *Adam Schmidt.*

Ludford, G. S. S.: Riemann's method of integration. Its extensions with an application. *Collect. Math., Barcelona* 6, 293—323 (1953).

§ 1 of this paper contains the canonical form of the second order hyperbolic differential equation in two independent variables. The adjoint operator M of the operator $L(w) \equiv w_{rs} + a w_r + b w_s + c w$ is defined by

$$M(v) = v_{rs} - (a v)_r - (b v)_s - c v.$$

(§ 2). In the Cauchy problem of the first kind the values of w and $\partial w / \partial n$ are prescribed on an arc C which is nowhere tangential to a characteristic. The solution of this problem is given by the formula of Riemann (§ 3). Its discussion is given in § 4. Next, § 5 contains examples of the Riemann function: (1) $a = b = (r + s)^{-1}$, $\lambda = \text{const.}$, $c = 0$; (2) $a = b = m = \text{const.}$, $c = 0$. In the Cauchy problem of the second kind the values of w only are prescribed on two segments of characteristic lines of different families. The solution is given again by Riemann's formula [after some modifications (§ 6)]. § 7 contains an extension of Riemann's method to the case where the curve C is tangential to a characteristic at some point. The appli-

cation of Riemann's method is successful in the case of one-dimensional gas dynamics (§§ 8, 9). In §§ 10, 11, 12 the special case of motion in a closed tube is discussed and an estimate of the time of first occurrence of breakdown has been made. Finally, some remarks and supplements are given (§§ 13, 14, 15) regarding especially two general theorems used by H. Rademacher in the verification of Riemann's fundamental formula.

M. Pinl (Math. Reviews 16, 483).

Conti, Roberto: Sul problema di Darboux per l'equazione $z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y)$. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser., Sez. VII 2, 129—140 (1953).

Mit einem Approximationsverfahren, das auf Tonelli [Bull. Calcutta math. Soc. 20, 31—48 (1928)] zurückgeht, beweist Verf. die Existenz einer Lösung der

Integralgleichung $u(x, y) = q(x) + \psi(y) + c + \int_0^y \int_0^x f(x, y, u, u_x, u_y) dx dy$, wobei

$q(0) = \psi(0) = c$, unter der Annahme, daß $f(x, y, u, p, q)$ stetig und beschränkt ist und bezüglich p und q eine Lipschitzbedingung erfüllt, und daß $q(x)$ und $\psi(y)$ überall beschränkte Differenzenquotienten besitzen. Hartmann und Wintner (vgl. dies. Zbl. 48, 333) setzen noch Stetigkeit der ersten Ableitungen von q und ψ voraus.

Adam Schmidt.

Volpato, Mario: Sugli elementi uniti di trasformazioni funzionali. Un problema ai limiti per una classe di equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser., Sez. VII 2, 93—109 (1953).

Die Lösungen des Anfangswertproblems $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$, $u(x, 0) = q(x)$, $u(0, y) = \psi(y)$, $q(0) = \psi(0) = c$, sind Invarianten der Funktionaltransformation $v(x, y) = q(x) + \psi(y) + c + \int_0^y \int_0^x f(x, y, u, u_x, u_y) dx dy$. Analog für

entsprechende Probleme n -ter Ordnung mit n unabhängigen Variablen. Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen [vgl. z. B. Schauder, Math. Z. 26, 417—431 (1927)] wird vom Verf. so verschärft, daß er auch unter den schwachen Voraussetzungen über f , q , und ψ angewendet werden kann, unter denen Hartman und Wintner (dies. Zbl. 48, 333) die Existenz der Lösungen des Anfangswertproblems nachwiesen.

Adam Schmidt.

Mikusiński, J. G.: Sur un type de conditions mixtes pour les équations aux dérivées partielles. Studia math. 13, 277—286 (1953).

I metodi di calcolo operatorio discussi dall'A. in un suo precedente lavoro (questo Zbl. 44, 127), cui si rinvia per quanto riguarda le notazioni e le ipotesi qualitative, sono qui elegantemente applicati al seguente problema al contorno

$$(1) \quad \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial t^\mu \partial \lambda^\nu} x(t, \lambda) = q(t, \lambda) \quad \text{per } 0 \leq t < +\infty \quad \text{e} \quad \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2,$$

$$(2) \quad \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n \alpha_{m-\mu+\nu} \frac{d^\nu}{d\lambda^\nu} \left(\left[\frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} x(t, \lambda) \right]_{t=0} \right) = g_\mu(\lambda)$$

$$\text{per } \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 \quad \text{e} \quad \mu = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$(3) \quad x(t, \lambda_1) = v_1(t), \quad x(t, \lambda_2) = v_2(t) \quad \text{per } 0 \leq t < +\infty,$$

dove $x(t, \lambda)$ è l'incognita, e i dati sono: $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_{\mu\nu}$ (costanti), $g_\mu(\lambda)$, $q(t, \lambda)$, $v_1(t)$ e $v_2(t)$. Si ottiene così il seguente criterio d'unicità. Affinchè la (1) non abbia più d'una soluzione verificante le (2) e (3), è necessario e sufficiente che l'equazione operatoria $a_0 w^m + a_1 w^{m-1} + \dots + a_m = 0$ (con $a_{m-\nu} = \alpha_{m\nu} s^m + \alpha_{m-1,\nu} s^{m-1} + \dots + \alpha_{0\nu}$) nella incognita w non abbia più di due radici logaritmiche w_1 e w_2 , e che sia inoltre $w_1 - w_2 \neq 2k\pi i/(\lambda_2 - \lambda_1)$ (k intero). Alcuni esempi mostrano come, soddisfatta la condizione espressa da questo criterio, la soluzione possa esprimersi mediante le radici w_1 e w_2 . Sarebbe interessante studiare il significato di questa condizione nei riguardi dei coefficienti $\alpha_{\mu\nu}$ della (1).

F. Bertolini.

Krzyżański, Mirosław: Sur le problème de Fourier dans une région indéfinie. Arch. Mech. stosow. 5, 584—587, russ. und französ. Zusammenfassg. 587—588 (1953) [Polnisch].

Es handelt sich um folgende Randwertaufgabe. Man sucht eine Funktion $u(x, t)$, die für $0 \leq x \leq k$, $-\infty < t < \infty$ stetig ist, stetige zweite Ableitungen ($0 < x < k$) besitzt und die Gleichung $\partial^2 u / \partial x^2 + a(x, t) \partial u / \partial x - \partial u / \partial t = 0$ samt Randbedingungen $u(0, t) = \psi_1(t)$, $u(k, t) = \psi_2(t)$ erfüllt. Dabei sind $\psi_i(t)$ stetige Funktionen: von der Funktion $a(x, t)$ wird vorausgesetzt, daß sie stetig ist und daß entweder $a(x, t) \geq 0$ oder $a(x, t) \leq 0$ gilt. Es sei K die Klasse der Funktionen, welche folgende Bedingung erfüllen. Zu jedem $u \in K$ gibt es eine Konstante $\lambda(k) = (\pi/2k)^2$, für welche die Funktion $u(x, t) \cdot \exp[-\lambda(k) \{t^2 + 1\}]$ beschränkt ist. Für Lösungen der Klasse K wird ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz bewiesen. Verf. bemerkt noch abschließend, wie man den Fall einer größeren Anzahl der räumlichen Veränderlichen behandeln könnte.

R. Výborný.

Evans II, George W.: An application of the Mauro Picone theorem for heat conduction. Proc. Amer. math. Soc. 4, 961—968 (1953).

L'A. espone delle considerazioni sulle temperature delle pareti di un forno e sul flusso di calore attraverso di esse, fondate sul seguente teorema: Sia R un dominio del piano (x, t) contenuto nella striscia $0 \leq t \leq T$; la frontiera di R sia costituita da un insieme contenuto nella retta $t = T$ e da un insieme chiuso E . Sia $u(x, t)$ una funzione continua in R , dotata in $(R - E)$ delle derivate $\partial^2 u / \partial x^2$, $\partial u / \partial t$ continue, soddisfacente in $(R - E)$ l'equazione del calore $\partial^2 u / \partial x^2 = \partial u / \partial t$; il massimo (o il minimo) di $u(x, t)$ in R sia assunto in un punto $(\xi, \tau) \in (R - E)$. Allora, per ogni punto (x, τ) che può congiungersi a (ξ, τ) con una curva C di equazioni $t = f(s)$, $x = g(s)$, $0 \leq s \leq 1$ (con $f(0) = \xi$, $g(0) = \tau$, $f(1) = x$, $g(1) = E$, $f(s), g(s)$ continue ed $f(s)$ non crescente in $(0, 1)$, $|f(s), g(s)| \in (R - E)$ per $0 \leq s \leq 1$) risulta $u(x, t) = u(\xi, \tau)$. L'A. enuncia questo teorema in maniera un po' diversa e, invece di imporre alla curva C di partire da (ξ, τ) , si limita a supporre che parta da un punto comune ad R ed alla retta $t = \tau$, ipotesi in genere troppo debole; ciò però non ha influenza sulle considerazioni successive, per le quali interessa solo il caso in cui R sia un rettangolo.

E. de Giorgi.

• **Bergman, Stefan and M. Schiffer:** Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics. (Pure and Applied Mathematics, Vol. IV.) New York: Academic Press Inc., Publishers; London: Academic Books, LTD 1953.

Il presente volume costituisce una valida introduzione alla teoria delle equazioni alle derivate parziali della fisica matematica; in modo particolare la Parte A di esse. Il capitolo I è dedicato alla propagazione del calore con riguardo anche ai problemi di trasmissione in due corpi di diversa conduttività termica. Il capitolo II è dedicato alla dinamica dei fluidi e contiene i fondamenti matematici della teoria. Il capitolo III tratta delle equazioni della elettrostatica e della magnetostatica e l'ultimo capitolo della Parte A contiene un'esposizione dei fondamenti matematici della elastostatica classica. La Parte B ha per scopo l'esposizione dei metodi fondati sull'impiego della cosiddetta „kernel function“ tanto largamente studiata dai due AA. Se U è uno spazio lineare di funzioni (scalari e tensoriali) in cui è definito un prodotto scalare (u, v) e tale che il valore di un elemento $u \in U$ in un punto x sia un funzionale continuo di u , allora può scriversi $u(x) = (K(x, y), u(y))$, essendo $K(x, y)$ la kernel function di U . Negli spazi delle soluzioni delle equazioni omogenee di tipo ellittico può introdursi un prodotto scalare che dà luogo alla esistenza di una kernel function. Ciò permette di dedurre diverse notevoli proprietà per le soluzioni dell'equazione. Particolarmente interessante il fatto che la $K(x, y)$ si esprime come la differenza della funzione di Green e di quella di Neumann. Le proprietà della kernel function vengono dagli AA. studiate in dettaglio nei capitoli I, II, III della Parte B; particolarmente notevole il III in cui vengono espone le proprietà di dipendenza dal

dominio dei nuclei (funzione di Green, di Neumann e kernel function) per una equazione ellittica. Il capitolo IV è dedicato all'esposizione di un metodo per l'ottenimento dei teoremi di esistenza. Trattasi sostanzialmente di una variante del metodo delle proiezioni (proiezione sulla varietà delle soluzioni dell'equazione omogenea, anziché su quella delle funzioni che verificano le condizioni al contorno omogenee, com'è fatto nell'originario metodo di Weyl). Tale metodo è stato per la prima volta impiegato dal recensore [Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat. II. Ser. 15, Fasc. I—IV (1946); questo Zbl. 41, 67; Atti Acad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 5, 314—324 (1948); questo Zbl. 43, 101]. Esso però viene attribuito dagli AA. a Garabedian-Schiffer ed a Lax. Interessante il cap. V che mostra la dipendenza dei nuclei dai dati al contorno e dall'operatore differenziale. Nell'ultimo capitolo sono indicate alcune possibili generalizzazioni della teoria, dovute a diverse definizioni del prodotto scalare nello spazio delle soluzioni. *G. Fichera.*

Garding, Lars: Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations. Math. Scandinav. 1, 55—72 (1953).

Ausgehend von linearen Differentialoperatoren beliebig hoher Ordnung werden Beweise des Dirichletschen Problems für elliptische partielle Differentialgleichungen gegeben. Die wesentliche Eigenschaft der hier diskutierten verallgemeinerten Dirichletschen Integrale ist ihre Beschränktheit nach unten. Die Arbeit benutzt Begriffsbildungen, die der Schwartzschen Theorie der Distributionen nahe stehen, indem sie, ausgehend von sogenannten schwachen Lösungen, die geforderte Lösung des Dirichletschen Problems findet. Dieser Gedanke kann auch so formuliert werden, daß eine Lösung im Sinne der Theorie der Distributionen unter gewissen natürlichen Voraussetzungen auch eine Lösung im üblichen Sinne ist. Es ist das besondere Verdienst der vorliegenden Arbeit, herauszustellen, daß die Eigenschaft eines Problems, elliptisch zu sein, charakteristisch für die weitgehende Äquivalenz der schwachen und starken Lösungen ist. *Claus Müller.*

Gårding, Lars: On the asymptotic distribution of eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators. Math. Scandinav. 1, 237—255 (1953).

Die Arbeit überträgt zunächst die Begriffe Eigenwert und Eigenfunktion auf elliptische Differentialgleichungen beliebig hoher, gerader Ordnung und gewinnt dann, ausgehend von Begriffsbildungen, die T. Carleman in ähnlichem Zusammenhang entwickelt hat, erstmalig die folgenden asymptotischen Gesetze für die Eigenwerte und Eigenfunktionen. Ist

$$\sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq 2m} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^{x_1 + \dots + x_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} + \lambda$$

der elliptische formal selbstadjungierte Differentialoperator, d. h. ist

$$a_0(x, \xi) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2m} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x) \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$$

als Polynom in ξ_1, \dots, ξ_n im beschränkten Gebiet S positiv definit, so gilt für die Eigenwerte λ_i und orthonormierten Eigenfunktionen φ_i :

$$N(t) = \sum_{\lambda_i \leq t} 1 = (2\pi)^{-n} w_a(s) t^{n/2m} (1 + o(1))$$

und

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{j=1}^N \overline{\varphi_j(x)} \varphi_j(y) = \delta_{yx} \frac{w_a(x)}{w_a(s)},$$

mit

$$w_a(x) = \int_{a_0(x, \xi) < 1} d\xi \quad \text{und} \quad w_a(s) = \int_S w_a(x) dx.$$

Claus Müller.

Hausner, Melvin: Dirichlet's principle and generalized boundary values. Ann. of Math., II. Ser. 57, 475—489 (1953).

Die Arbeit behandelt Differentialformen beliebigen Grades und beliebiger Dimension. Unter Benutzung der Mittelbildung von Bochner und Friedrichs werden mit Hilfe des Cartanschen Kalküls der Differentialformen Gesetze über so-

genannte harmonische Vektoren abgeleitet, die in formaler Analogie zum Dirichletschen Prinzip stehen und durch topologische Begriffsbildungen präzisiert werden können. *Claus Müller.*

Kurzweil, Jaroslav: Über die Eindeutigkeit der Lösung des modifizierten Dirichletschen Problems. *Časopis Mat.* **78**, 213—214 (1953) [Tschechisch].

Huber, Alfred: A theorem of Phragmén-Lindelöf type. *Proc. Amer. math. Soc.* **4**, 852—857 (1953).

Betrachtet werden diejenigen Lösungen der von Weinstein (dies. Zbl. **53**, 253) untersuchten elliptischen Differentialgleichung

$$L_k(u) \equiv \sum \partial^2 u / \partial x_i^2 + k x_n^{-1} \partial u / \partial x_n = 0 \quad (k < 1),$$

die im Halbraum $H = \{x_n > 0\}$ erklärt sind und an den (endlichen) Randpunkten M ($x_n = 0$) die Bedingung $\lim_{P \rightarrow M} u(P) \leq 0$ ($P \in H$) erfüllen. Mit Hilfe einer Art

Verallgemeinerung der Poissonschen Integralformel auf die Darstellung der Lösung des 1. Randwertproblems für die Halbkugel bei $L_k(u) = 0$, für die Verf. inzwischen anderwärts einen Beweis gegeben hat (dies. Zbl. **57**, 88), wird gezeigt: 1. Stets existiert (im weiteren Sinne) für $m(r) = \lim_{0 < P \rightarrow r} u(P)$.

$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r)}{r^{1-k}} = \alpha \geq 0$. 2. Es ist $u \leq x_n^{1-k} \alpha$ in H , und es gilt überall Gleichheit, wenn sie in einem Punkte gültig ist. — Im Falle $k = 0$ der harmonischen Funktionen erhält man Erweiterungen bzw. Verschärfungen von Sätzen von Ahlfors (dies. Zbl. **16**, 32), Heins (dies. Zbl. **60**, 221) und H. Keller (dies. Zbl. **40**, 198).

Hermann Schmidt (Würzburg).

Bicadze, A. V.: Ein räumliches Analogon des Integrals vom Cauchyschen Typus und einige seiner Anwendungen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR. Ser. mat.* **17**, 525—538 (1953) [Russisch].

In this paper the author introduces the two dimensional integrals of Cauchy type. Using the Gauss-Ostrogradskij formula the author proves the following analogon of the formula of D. Pompeiu [*Rend. Circ. mat. Palermo* **33**, 108—113 (1912); **35**, 277—281 (1913)]

$$\iint_S M(\xi, \eta, \zeta; x, y, z) \vec{q} d\omega + \iiint_D \left(\operatorname{div} \vec{q} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{\rho} + \operatorname{rot} \vec{q} \times \operatorname{grad} \frac{1}{\rho} \right) d\tau$$

$$= \vec{q}(x, y, z) \text{ for } (x, y, z) \in D \text{ resp. } = 0 \text{ for } (x, y, z) \text{ non } \in D,$$

where D denotes a domain bounded by a surface S satisfying the Liapounoff-conditions, \vec{q} is a vector field, $\rho(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)$ the distance between the points (ξ, η, ζ) , (x, y, z) and M a certain 3×3 matrix depending on the coordinates of the normal to S . This formula is applied to the problem of boundary values of integrals of Cauchy type (three dimensional analogon to Sochocki formula), as well as to a certain singular integral equation, to the Poisson's formula for the sphere, Dirichlet's problem for the half-space $z \geq 0$ and Dirichlet's problem for a space cut along a circular disc. *J. Görski.*

Komatu, Yûsaku and Imsik Hong: On mixed boundary value problems. *Kodai math. Sem. Reports* **3**, 65—76 (1953).

Treatment, from a different point of view, of the mixed boundary-value problem studied by the first author in a previous paper (this Zbl. **51**, 77).

Z. Nehari (M. R. **15**, 425).

Finn, Robert: Isolated singularities of solutions of non-linear partial differential equations. *Trans. Amer. math. Soc.* **75**, 385—404 (1953).

Die Laplacesche Gleichung $q_{xx} + q_{yy} = 0$ besitzt als Elementarlösung $q = \log r$, $r^2 = x^2 + y^2$, die bei $x = y = 0$ eine logarithmische Singularität aufweist und sonst regulär und eindeutig ist. Eine Gleichung von Typ $(q q_x)_x + (q q_y)_y = 0$, $q = q(x, y)$ zeigt unter Umständen ein ganz anderes Verhalten, indem man zwar Lösungen angeben kann, die logarithmisch singular werden, jedoch nicht nur in einem isolierten Punkt, sondern z. B. in allen Punkten einer geschlossenen Kurve. Will man Singularität nur in einem isolierten Punkt, dann muß man die Art dieser Singularitäten

beschränken. Den Grund hierfür kann man darin sehen, daß der Massenfluß einer inkompressiblen bzw. kompressiblen Strömung, die diesen Gleichungen gehorcht, unendlich sein kann bzw. beschränkt ist. Für die Gleichung der Minimalfläche sind diese Verhältnisse unter anderem von L. Bers (dies. Zbl. 45, 425) untersucht worden. Verf. diskutiert Gleichungen vom Typ $\Theta_x + A_y = 0$ wobei Θ und A Funktionen von x, y, q_x, q_y sein können, und betrachtet speziell Lösungen $q(x, y)$, für die $\Theta q_x + A q_y = 0$ für $q_x, q_y \neq 0$. Durch diese Bedingung wird eine Analogie zu obigem Massenflußkriterium hergestellt. Es ergibt sich unter gewissen Voraussetzungen: 1. eine Verallgemeinerung des bekannten Minimum-Maximum-Prinzips für lineare Gleichungen, 2. eine Lösung q mit einer isolierten Singularität bei $x = y = 0$ ist beschränkt in $0 < x^2 + y^2 < R^2$, R genügend klein. Ferner: Hängen Θ und A nur von q_x und q_y ab, ist $\Theta_x + A_y = 0$ elliptisch und ist q eine in einem isolierten Punkt X eines Bereiches D singuläre Lösung, sonst in D eindeutig, dann ist die Singularität behebbar. Es folgt ein Ausblick auf mehrdeutige Lösungen und gasdynamische Anwendungen.

C. Heinz.

Titchmarsh, E. C.: Eigenfunction expansions associated with partial differential equations. II, III, IV, V. Proc. London math. Soc., III. Ser. 3, 80—98, 153—169, 254—266 (1953); 5, 1—21 (1955).

Part I see this Zbl. 43, 101. — Part II. Expansion problems for the case $\nabla^2 u + (\lambda - q(x, y))u = 0$, $-\infty < x, y < \infty$, $q(x, y) \rightarrow \infty$ for $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$. Let λ_n, ψ_n be eigenvalues and eigenfunctions, then $f = \sum c_n \psi_n(x, y)$ holds true if $f \in L^2$, f absolutely continuous. Sharp summability conditions are given. Asymptotic estimations, e. g. $\psi_n(x, y) = O(\lambda_n^{-1/4})$ are made and further results obtained, generalizing those of Minakshisundaram in the case $q = 0$ and a finite region. The methods applied by the author are function theoretic, as in the earlier paper in this series. For the asymptotic estimations, Bessel functions are used.

Part III. The author makes the well-known asymptotic method of Carleman applicable to this case and succeeds in extending results of Pleijel and Minakshisundaram. Further it is proved that

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{4\pi} \iint_{q < \lambda} (\lambda - q(x, y)) dx dy,$$

$N(\lambda)$ being the number of eigenvalues not exceeding λ , all under certain restrictions as to the growth of $q(x, y)$.

Part IV. The methods and results of the earlier papers by the author are extended to the case

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + (\lambda s(x, y) - q(x, y))u = 0, \quad -\infty < x, y < \infty.$$

(Change of variables $t = p(x, y)$ can be taken $p = 1$). Iteration and the resolvent equation are steps in the construction of the Green function. Uniqueness is proved as in Titchmarsh, this Zbl. 31, 308; Sears, this Zbl. 51, 42). Discreteness of spectrum for $q \rightarrow \infty$ for $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ ($p = 1$) is proved by means of comparison with the case $p = s = 1$, q being a stepfunction with two steps, and application of known properties of Bessel functions. (Cf. the sharp results by Moléanov, this Zbl. 52, 102, in the one-dimensional case).

Part V. The equation $(\nabla^2 + \lambda - q(x, y))u = 0$, $-\infty < x, y < \infty$ (and the corresponding 3-dimensional one) is assumed to be separable. The author constructs in a rigorous way the Green functions (or spectral function) in some cases from the corresponding Green functions of the separated equations, e. g. for the Schrödinger equation of the H-atom. Several valuable details are given. As to the general abstract problem one should consult H. O. Cordes; this Zbl. 50, 118; 61, 117.

G. Borg.

Grinberg, S. I.: Über die Asymptotik der Eigenwerte des Laplaceschen Operators. *Uspechi mat. Nauk* 8, Nr. 6, 97—102 (1953) [Russisch].

Für die Eigenwerte λ_v der Randwertaufgabe: $\Delta u + \lambda u = 0$ im Innern eines räumlichen Bereichs D , $u = 0$ auf der Begrenzungsfläche von D (deren Krümmung überall positiv und beschränkt vorausgesetzt wird), gilt für $p \rightarrow \infty$

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_v (\lambda_v + p)} = \frac{v}{4\pi\sqrt{p}} - \frac{S}{16\pi} \frac{\log p}{p} + \frac{O(1)}{p},$$

falls v der Inhalt von D und S der Flächeninhalt der Begrenzungsfläche ist. — Vgl. Carleman, dies. Zbl. 17, 114. Adam Schmidt.

Teleman, S.: Une propriété des fonctions du développement d'Almansi d'une fonction polyharmonique. *Acad. Republ. popul. Române. Bul. ști. Sect. Ști. mat. fiz.* 5, 385—391, russ. und französ. Zusammenfassung 390—391 (1953) [Rumänisch].

On considère, pour une fonction $F(M)$ polyharmonique d'ordre p dans D , le développement d'Almansi

$$(*) \quad F(M) = F_1(M) + r^2 F_2(M) + \dots + r^{2p-2} F_p(M),$$

où $r = M M_0$, M_0 étant fixe dans D et les $F_i(M)$ étant harmoniques dans le plus grand domaine étoilé centré en M_0 . Pour ce développement, qui généralise un résultat de Goursat pour les fonctions biharmoniques [*Bull. Soc. math. France.* 26, 236—237 (1898)] et dont l'existence a été démontrée par Almansi [*Ann. Mat. pura appl.*, III. Ser. 2, 1—51 (1899)] et l'unicité par M. Nicolesco (ce Zbl. 13, 206) et M. Picone (ce Zbl. 14, 261). L'A. donne d'abord une démonstration où il utilise les idées d'Almansi et M. Nicolesco et certains opérateurs différentiels Ω_i considérés pour la première fois par le Ref. pour la construction effective des fonctions F_i . [*Travaux Sess. gén. sci. Acad. Republ. popul. Roumaine* 1950, 290—298 (1954)]. Ensuite l'A. démontre par récurrence que la fonction F_i de (*), qui est harmonique par rapport à M , est polyharmonique d'ordre $p - i + 1$ par rapport à M_0 ($i = 1, 2, \dots, p$).

J. Elianu.

Variationsrechnung:

Sloovere, H. de: Le calcul des variations successives d'une intégrale multiple, par la méthode invariante de Th. de Donder. *Acad. Roy. Belgique. Bull. Cl. Sci., V. Sér.* 39, 948—952 (1953).

Verf. dehnt seine Methode der rekurrenten Berechnung der Variationen höherer Ordnung eines mehrdimensionalen Variations-Integrals (dies. Zbl. 51, 80) auf den Fall aus, daß im Integranden neben den ersten Ableitungen auch noch die zweiten Ableitungen der gesuchten Funktionen auftreten. Dies wird für die ersten drei Variationen explizit durchgeführt.

G. Beckert.

Föllinger, Otto: Diskontinuierliche Lösungen mit Spitzen in der Variationsrechnung. *Arch. der Math.* 4, 121—132 (1953).

L'A. trova delle condizioni necessarie e delle condizioni sufficienti perchè una curva dotata di punti angolosi cuspidali fornisca un minimo relativo debole di un integrale semplice in forma parametrica, in un senso opportuno. Un esempio completa il lavoro.

G. Stampacchia.

Giorgi, Ennio de: Compiuta ricerca dell'estremo inferiore di un particolare funzionale. *Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli*, IV. Ser. 19 (91), 29—41 (1953).

In questo lavoro l'A. studia la ricerca del minimo del funzionale

$$(*) \quad I(x) = \int_{t_1}^{t_2} (p \dot{x}^2 + q x^2 + 2 r x) dt$$

nell'insieme delle curve di classe C^1 con estremi mobili, nell'ipotesi che gli estremi possano variare in due insieme chiusi e limitati. Le premesse di carattere generale (verso M. Picone) sono: sia dato nel piano (t, x) un dominio Ω formato dei punti per cui $a \leq t \leq b$, $-\infty < x < +\infty$

e i funzioni $p > 0, q, r$ da t , continue con le loro derivate prime nell'insieme $[a, b]$. L'equazione probabile di Eulero è $[d(p \dot{x})/dt] - qx - r = 0$. Si considerano tre casi. 1° Interno all'intervallo (t_1, t_2) esiste un punto coniugato di t_1 rispetto all'equazione (**): $[d(p \dot{u})/dt] - qu = 0$. In tal caso l'estremo inferiore del (*), nell'insieme $I(P_1, P_2)$, è $m(P_1, P_2) = -\infty$. Qui sono: $P_1(t_i, x_i)$ due punti nel Ω , dove è $t_1 < t_2$, $I(P_i)$ l'insieme delle curve di classe CD' congiungenti P_1 con P_2 . 2° L'unico punto coniugato di t_1 è t_2 . Quindi, o esistono infinito estremali, oppure è $m = -\infty$. 3° Nell'intervallo, indicato sopra, non cadono punti coniugati di t_1 ; in tal caso m è dato dal valore assunto dal (*) in corrispondenza all'unica estrema che congiunge i punti P_i . Supposta, che nel Ω sono dati due insieme chiusi e limitati C_1, C_2 , gli insieme proiezioni $\theta(C_i)$ sull'asse t e loro estremi τ'_1, τ'_2 , sodisfa la relazione $\tau'_1 \leq \tau'_2$, considerando le coppie (P_1, P_2) come punti di un S_1 euclideo, (t_i, x_i) , per cui P_i sono contenuti in C_i , formando un insieme chiuso limitato K , l'A. distingue tre casi possibili, prendendoli in considerazione l'esistenza d'un punto, interno all'intervallo (τ'_1, τ'_2) , coniugato di τ'_1 rispetto all'equazione (**). Un esempio particolare è studiato ($p = 1, q = -1, r = t$).

D. Rašković.

Fite, Wade L.: Maximization of return from limited resources. J. Soc. industr. appl. Math. 1, 73—90 (1953).

Si studia il problema di rendere massimo, rispetto alla funzione $D(x)$, l'integrale: $\int F(x) S[D(x)] dx$ sotto le condizioni: $D(x) \geq 0$ e $\int D(x) dx = \text{cost.}$ $S(D)$ essendo una funzione, compresa fra zero ed uno, crescente e concava verso l'alto per $D < D$ e convessa per $D > D$ ed $F(x)$ una funzione assegnata. Il problema è suggerito da un problema pratico di studiare il modo di distribuire una data quantità di polvere insetticida su un campo di crisantemi per uccidere la massima quantità di insetti parassiti.

G. Stampacchia.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Vasilache, Sergiu: Sur une nouvelle équation des télégraphistes. Acad. Republ. popul. Române. Studii Cerc. mat. 4, 373—388, russ. und französ. Zusammenfassg. 388—391 (1953) [Rumänisch].

En continuant une étude antérieure (ce Zbl. 49, 269), l'A. s'occupe d'une équation des télégraphistes, en tenant compte de l'hérédité magnétique et diélectrique et en supposant L et C des fonctions périodiques de t . On arrive à l'équation

$$V_{zz} = a(t) V_{tt} + b(t) V_t + c(t) V = \int_0^t (K_{00}(t, \tau) + K_{01}(t, \tau) V_\tau(z, \tau) + K_{02}(z, \tau) V_{\tau\tau}(z, \tau)) d\tau,$$

les fonctions $a, b, c, K_{00}, K_{01}, K_{02}$ étant connues. Pour certains problèmes aux limites cette équation est ramenée à une forme plus simple; elle est résolue dans le cas d'une ligne semi-infinie, au repos pour $t = 0$ et à laquelle on applique, au moment $t = 0$, une f. e. m. $E(t)$. La solution est donnée par

$$W(x, u) = A(u) e^{(x-u/2)p(u)} + \int_{\alpha/2}^x \int_0^u I_1(u, \xi, \eta) A(\eta) x p(u) e^{-(\eta/2)p(\eta)} d\eta,$$

où $u = x - y$, $W(x, u) = V(x, y)$, p et q sont des fonctions connues et $I_1(u, \xi, \eta)$ et $A(u)$ sont des fonctions obtenues des données du problème à l'aide de certaines transformations intégrales.

A. Haimovici.

Vučković, Vladeta: Une extension de la condition de convergence dans les théorèmes de nature taubérienne. Srpska Akad. Nauk, Zbornik Radova mat. Inst. 35, Nr. 3, 75—83 und französ. Zusammenfassg. 83—84 (1953) [Serbisch].

Let $\chi(x) (x \geq 0)$ be a function non-decreasing and continuous from the right on $(0, \infty)$ such that $\chi(\infty) = \infty$; q the inverse function of χ which is continuous from the left; $X = X(x, \varepsilon) = q[\chi(x) + \varepsilon]$ ($\varepsilon \geq 0$); $\Phi(x)$ a continuous and strictly increasing function on $(-\infty, +\infty)$; ϱ a function such that $\varrho(x') \asymp \varrho(x)$ uniformly for $x \leq x' \leq X$ and $\limsup_{x \rightarrow \infty} \max_{x \leq x' \leq X} \frac{\varrho(x') - \varrho(x)}{\varrho(x)} = o(1)$ ($\varepsilon \rightarrow 0$). Now

$\int_0^x f(t) d\chi(t) = o(1)$ ($x \rightarrow +\infty$) implies $f(x) = o(1)$ ($x \rightarrow \infty$) whenever the con-

vergence condition

$$(*) \liminf_{x \rightarrow \infty} \min_{x \leq x' \leq X} \frac{\varrho(x') \Phi[f(x')] - \varrho(x) \Phi[f(x)]}{\varrho(x)} > o(1)$$

($\varepsilon \rightarrow 0$) is fulfilled. [The condition (*) is a generalization of well-known Karamata's conditions. They are obtained by setting $\Phi = 1$ or $\varrho = 1$ in (*).] Using this result the author generalizes some of Karamata's theorems. *S. Kurepa.*

Vučković, Vladeta: Die Stieltjes-Transformation, die mit der Geschwindigkeit der Exponentialfunktion unendlich klein wird. Srpska Akad. Nauk. Zbornik Radova mat. Inst. 35, Nr. 3, 255—287. deutsche Zusammenfassg. 287—288 (1953) [Serbisch].

Let $A(u)$ be a function of bounded variation on every bounded interval. $A(0) = 0$, and

$$(1) \quad S(x) = \int_0^\infty \frac{dA(u)}{u+x} = O(e^{-x^\alpha}) \text{ for } x \rightarrow \infty.$$

If $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ then the function

$$(2) \quad X(s) = \int_0^\infty e^{-su} u^\gamma A(u^{1/\alpha}) du \quad \gamma > -1, \quad s = \tau + it,$$

is regular not only for $\operatorname{Re} s > 0$, but also for $s = 0$. If $\alpha > \frac{1}{2}$ then $A(u) = 0$ almost everywhere. If in addition $A(u)$ satisfies the convergence condition

(3) $u^\beta (A(v) - A(u)) > -m$ for all $u \leq v \leq u + u^{1-\alpha}$ with $\beta > -\alpha$ then

(4) $u^\beta A(u) = O(1)$ for $u \rightarrow \infty$. Further if

$$L(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma u} dA(u) = O\left(\exp \frac{1}{\sigma^{1/(1-\alpha)}}\right), \quad \sigma \rightarrow 0+, \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{2},$$

and $A(u)$ satisfies (3), then (4) holds too. The regularity of $X(s)$ has been applied on Stieltjes's and Dirichlet's series. Let $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty$ be a sequence

and let the series $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{\lambda_n} \cdot x^{a_n} = g(x)$ converge for one and therefore for all $x > 0$.

If $g(x) = O(e^{-x^\alpha})$, $x \rightarrow \infty$, $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, and $A(u) = \sum_{\lambda_n \leq u} a_n$ then $X(s) =$

$\int_0^\infty e^{-su} u^\delta A(u^{1/\alpha}) du$ is regular not only for $\operatorname{Re} s > 0$, but also for $s = 0$ (δ is

an arbitrary real number). The function $\frac{1}{s} \sum_{n=1}^\infty a_n \lambda_n^\tau e^{-s \lambda_n^\alpha}$ ($\tau \geq 0$) is regular not only for $\operatorname{Re} s > 0$ but also in $s = 0$. *S. Kurepa.*

Stanković, Bogoljub: Solution d'une équation intégrale homogène. Srpska Akad. Nauk, Zbornik Radova mat. Inst. 35, Nr. 3, 95—106, franz. Zusammenfassg. 106 (1953) [Serbisch].

Le spectre des valeurs caractéristiques de l'équation intégrale

$$f(x) = \int_{\tau x_0}^{\lambda} e^{-t^{3/4} x} f(t) dt$$

est continue. On a montré l'existence des fonctions caractéristiques de cette équation intégrale ainsi que leur unicité si on se limite à la classe des fonctions se comportant régulièrement aux voisinage de $x = 0$ ou $x = \infty$. On en a donné aussi les solutions. J. Karamata a donné un contreexemple montrant que, si l'on ne se limite pas aux fonctions se comportant régulièrement, des fonctions caractéristiques correspondant à une valeur caractéristique existent en nombre infini. *S. Kurepa.*

Delange, Hubert: Sur certaines intégrales de Laplace. Bull. Sci. math., II. Sér. 77, 141—168 (1953).

Behandelt werden Laplace-Stieltjes-Integrale der Form $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\lambda(t)$,

worin $\lambda(t)$ eine komplexwertige, für $t \geq 0$ erklärte Funktion bedeutet, die in jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung ist. Die Konvergenzabszisse soll den endlichen Wert σ_c haben. Ist insbesondere $\lambda(t)$ reell, nicht abnehmend, so ist bekanntlich σ_c ein singulärer Punkt von $f(s)$. Es wird nach allgemeineren Bedingungen für das Auftreten von Singularitäten auf $\sigma = \sigma_c$ gefragt. In den folgenden Sätzen I., II. wird gemeinsam vorausgesetzt: es existiere eine reelle für $t \geq t_0 (\geq 0)$ stetige Funktion $\psi(t)$ derart, daß für $t' < t''$ stets

$$\left| \arccos \int_{t'}^{t''} \exp(-i\psi(u)) d\lambda(u) \right| \leq \varphi < \frac{1}{2}\pi \quad (\varphi \text{ fest}),$$

oder das Integral verschwindet. Gilt weiter I. $\psi(t+h) - \psi(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ bei beliebigem $h > 0$, so ist σ_c singulärer Punkt von $f(s)$, gilt dagegen II. $\psi(t'') - \psi(t') \leq k(t'' - t')$, so existiert mindestens ein singulärer Punkt im abgeschlossenen Intervall $[\sigma_c - ikC(q), \sigma_c + ikC(q)]$, wo $C(q)$ nur von q abhängig ist. Bei den Beweisen spielen Hilfsfunktionen der Form

$$F(s) = \int_a^\infty e^{-st} g(t) d\lambda(t)$$

eine wichtige Rolle, wobei $g(t)$ eine geeignete ganze Funktion vom Exponentialtyp bedeutet, derart, daß $F(s)$ in a allemal regulär ausfällt, wenn $f(s)$ in $\langle a - i\ell, a + i\ell \rangle$ regulär ist (a reell $\geq \sigma_c$). Für $F(s)$ kann in obigen Fällen σ_c als singulär nachgewiesen werden, und zwar mittels eines Hilfssatzes, der auf eine Übertragung des bekannten Pringsheimschen Satzes über das Auftreten einer Singularität im positiven Punkt des Konvergenzkreises einer Potenzreihe auf Laplace-Integrale hinausläuft. — Weiterhin werden nun Abschätzungen für die günstigste Wahl von $C(q)$ gegeben; insbesondere ergibt sich $C(0) = 1$, so daß bei $q = 0$ in II. das Intervall $[\sigma_c - ik, \sigma_c + ik]$ hervorgeht. Hierin ist ein älterer Satz von Polya enthalten, der sich auf

Dirichletreihen der Form $f(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ mit $\lim(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = l > 0$ be-

zieht; er besagt daß dann jedes Intervall der Länge $2\pi/l$ der (im Endlichen angenommen) Konvergenzgeraden mindestens einen singulären Punkt enthält. Ferner ergibt

sich noch ein Satz für Taylorreihen $F(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ von endlichem Konvergenzradius > 0 : gilt bei $a_n = r_n e^{i\theta_n}$ ($r_n < 0$) $|q_{n+1} - q_n| \leq \pi$, und $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_{n+1} - q_n|$

$= \gamma < \pi$, dann liegt auf dem Bogen $[\gamma, \pi - \gamma]$ des Konvergenzkreises mindestens ein singulärer Punkt.
Hermann Schmidt (Würzburg).

Obrechhoff (Obreškov), Nikola: Über einige Integraldarstellungen reeller Funktionen. B'lgarsk. Akad. Nauk. Otdel. fiz.-mat. techn. Nauki. Izvestija mat. Inst. 1, 83—109, russ. Zusammenfassg. 110 (1953) [Bulgarisch].

Wir bezeichnen mit $\Phi(x)$ die Funktion, die für $x > 0$ durch das konvergente Integral

(1) $\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-x t} t^\delta dt$ mit $\delta > 0$ gegeben wird. Wir untersuchen die Integralgleichung

(2) $f(x) = \int_0^\infty \Phi(x t) \varphi(t) dt$. Wir geben hier die Lösung dieser Gleichung mit Hilfe von Opera-

toren, die an den Post-Widdersehen Operator für die Laplacesche Gleichung erinnern, an. Satz: Möge $\varphi(x)$ eine in jedem Intervall $(0, x)$, $x > 0$, integrierbare Funktion sein und das Integral (2) für ein gewisses $x = c > 0$ konvergieren. Für $x > 0$ bilden wir die Reihe der Funktionen $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots$, die mittels der rekurrenten Folge $f_n(x) = x f_{n-1}'(x) + (1 - \delta) f_{n-1}(x)$,

$n \geq 1$, bestimmt sind. Dann haben wir für jedes $x = \alpha$, für das $\int_{\alpha}^{\alpha+h} |\varphi(t) - \varphi(x)| dt = o(h)$, $h \rightarrow 0$, gilt, die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n}}{2\pi \alpha^{n+1} n^{\delta-1}} f_n\left(\frac{n^2}{\alpha}\right) = \varphi(\alpha).$$

Wir erhalten $\Phi(x) = 2(\sqrt{x})^{\delta} K_{\delta}(2\sqrt{x})$, wo $K_{\delta}(t) = \frac{1}{2} \pi i e^{\frac{1}{2}\delta i \pi} H_{\delta}^{(1)}(it)$ eine Hankelsche Funktion für ein imaginäres Argument ist. Übersetz. d. russ. Zusammenfassg.

Aljančić, Slobodan: Asymptotische Entwicklungen \mathcal{A} -summierbarer linearer Funktionale. Srpska Akad. Nauk, Zbornik Radova mat. Inst. 35, Nr. 3, 157—208, deutsche Zusammenfassg. 208—212 (1953) [Serbisch].

The author finds some sufficient conditions under which an \mathcal{A} -summable functional

$$L(e^{-i\tau t} \psi(t)) = \lim_{\sigma \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{-i\tau t} \psi(t) d\varphi(t; \lambda),$$

where φ has a generalized asymptotic expansion in the form

$$(1) \quad \varphi(t; \lambda) = \sum_{\mu=0}^l \frac{p_{\mu}(t)}{q_{\mu}(\lambda)} + o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (q_{\mu}(\lambda) \neq 0, \quad \frac{q_{\mu}(\lambda)}{q_{\mu+1}(\lambda)} \rightarrow 0 \text{ as } \lambda \rightarrow \infty),$$

has an asymptotic expansion of the corresponding form:

$$(2) \quad L(e^{-i\tau t} \psi(t)) = \sum_{\mu=0}^l \frac{P_{\mu}(\tau)}{q_{\mu}(\lambda)} + o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

with
$$P_{\mu}(\tau) = \lim_{\sigma \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{-i\tau t} \psi(t) dp_{\mu}(t), \quad \mu = 0, 1, \dots, l.$$

The main result: Let $\psi(t) = \int_0^{\infty} e^{-tu} d\chi(u)$ where χ is of bounded variation on $(0, \infty)$ and $p_{\mu}(t) \in \Omega_h^m = \{F(t)\}$,

$$F(t) = \omega_0(t) \Pi_m(t) + \omega_1(t) \Pi_{m-1}(t) + \dots + \omega_m(t);$$

Π_{μ} is a polynomial of degree μ , ω_{μ} is a periodical function with period $h > 0$. If for some integer $k > m$

$$(3) \quad \int_0^{\infty} |d\{\Delta_h^k \varphi(t - kh; \lambda)\}| = o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

holds with

$$\Delta_h^k q = q(t) - \binom{k}{1} q(t+h) + \dots + (-1)^k q(t+kh),$$

then for $\tau \neq 2s\pi/h$ ($s = 0, \pm 1, \dots$) $L(e^{-i\tau t} \psi(t))$ is well defined and (1) implies (2) which holds uniformly for

$$2s\pi/h + \varepsilon \leq \tau \leq 2(s+1)\pi/h - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \pi/h, \quad s = 0, \pm 1, \dots$$

The condition (3) can be replaced by $W_0^T \{ \Delta_h^k q(t; \lambda) \} < M/q_l(\lambda)$ where M does not depend on λ , $t \geq T$ and $\Delta_h^k q \rightarrow 0$ (monotonously) as $t \rightarrow \infty$. Similar results have been obtained for \mathcal{A} -summable trigonometric series (χ is a step function). Using these results the author deduces several new asymptotic expansions of special functions (e. g. ultraspherical polynomials.)

S. Kurepa.

Kumar, Ram: A theorem on integral equation. Ganita 4, 123—128 (1953).

Let
$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{y-i\infty}^{y+i\infty} e^{px} \psi(p) dp, \quad J_{\lambda}^{\mu}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-x)^r}{r! \Gamma(1+\lambda+\mu r)} \quad (\mu > 0).$$
 The

author proves that $f(x) = x^{\lambda} \int_0^{\infty} e^{ax-by} J_{\lambda}^{\mu}(x^{\mu} y) f(y) dy$ provided the functional

relation $\psi(P) = (p-a)^{-(\lambda+1)} \psi\{b + (p-a)^{-\mu}\}$ holds and under certain conditions $x^{-\nu+1/2} e^{-ax^{1/2}} \int_{\frac{1}{2}}^x x^2 - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x y J_{\nu}^1(xy) y^{-\nu+1/2} e^{ay^{1/2}} f(\frac{1}{2}y^2) dy$. On putting $a = 0$, the result due to H. C. Gupta [J. Indian math. Soc., n. Ser. 7, 117—128 (1943)] follows.

T. Eweida.

Bhatnagar, K. P.: On a general transform. *Ganita* 4, 99—122 (1953).

In früheren Arbeiten (dies. Zbl. 51, 335; 52, 110; 53, 78) hat Verf. sich mit der Transformation

$$\omega_{\mu,\nu}(xy) = \sqrt{xy} \int_0^{\infty} J_{\nu}(t) J_{\mu}\left(\frac{xy}{t}\right) \frac{dt}{t}$$

und ihrer Verallgemeinerung

$$\omega_{\mu,\nu,\lambda}(xy) \int_0^{\infty} \int_t^{\infty} J_{\lambda}(t) \omega_{\mu,\nu}\left(\frac{xy}{t}\right) dt = \sqrt{xy} \int_0^{\infty} J_{\lambda}(t) \frac{dt}{t} \int_0^{\infty} J_{\nu}(\tau) J_{\mu}\left(\frac{xy}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau}$$

beschäftigt. In dieser Arbeit gibt Verf. dazu Beispiele von Funktionen, welche entweder zu sich selbst reziprok oder einfach reziprok zu gewissen anderen Funktionen sind, und einige Theoreme.

O. Volk.

Bhatnagar, K. P.: On self-reciprocal functions involving two complex variables. *Ganita* 5, Nr. 1, 33—44 (1954).

Verf. beschäftigt sich mit der Ausdehnung früherer Untersuchungen (siehe das vorstehende Referat) auf zwei Veränderliche [vgl. dazu A. Erdelyi, dies. Zbl. 16, 404; M. C. Gray, dies. Zbl. 3, 157; J. S. Reed, Duke math. J. 11, 565—572 (1944); R. P. Agarwal, dies. Zbl. 40, 352].

O. Volk.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Marinescu, G.: Sur le théorème de séparation des ensembles convexes par un hyperplan. *Comun. Acad. Republ. popul. Române* 3, 301—303, russ. und französ. Zusammenfassg. 302—303 (1953) [Rumänisch].

Using Zorn's theorem, the author gives a proof of the following result: Let E be a real vector space and let C_1 and C_2 be two disjoint convex parts of E . Then there are two convex parts of E , E_1 and E_2 such that: $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $E_1 \cup E_2 = E$, $C_1 \subset E_1$, $C_2 \subset E_2$ [see also E. Hille and R. S. Phillips, Functional analysis and semi-groups (this Zbl. 78, 100), Theorem 1.9.1, and the papers by S. Kakutani and J. W. Tukey quoted there].

C. Ionescu Tulcea.

Tagamliki, Ja.: Untersuchung der Vektoren, die bezüglich gewisser Kegel unzerlegbar sind. *B'lgarsk. Akad. Nauk, Otdel. fiz-mat. techn. Nauki, Izvestija mat. Inst.* 1, 57—68, russ. Zusammenfassg. 68 (1953) [Bulgarisch].

Die irreduziblen Elemente des Kegels der im Stieltjeschen bzw. Hamburgerschen Sinne positiven Folgen werden mittels einer einfachen Zerlegung ermittelt.

Autoreferat.

Rado, F.: Observations au sujet d'un système linéaire infini. *Acad. Republ. popul. Române, Bul. ști., Sect. Ști. mat. fiz.* 5, 285—292, russ. und französ. Zusammenfassg. 291—292 (1953) [Rumänisch].

L'A. discute une méthode de Borel pour la résolution du système $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^h u_n = A_h$, $h = 1, 2, \dots$, avec $0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_n < \dots$ et $a_n \rightarrow \infty$. Il démontre par un exemple que la formule donnée par Borel n'est pas toujours exacte et trouve des conditions pour qu'elle en soit.

G. Marinescu.

● **Cooke, Richard G.:** Linear operators. Spectral theory and some other applications. London: Macmillan and Co. Ltd. 1953. XII, 454 p. 52/6 d.

Kapitel 1 des Buches beginnt mit einer Darstellung der elementaren Grundgesetze, wie Vollständigkeit, Separabilität, Schwarzsche Ungleichung, Dreiecksungleichung im Funktionen-

raum L_2 als Hilbertraum betrachtet, und leitet hiervon zur Definition des abstrakten, separablen Hilbertraumes über. In Kapitel 2 folgen nacheinander weitgehend heuristische Abhandlungen über die Quantentheorien von Schrödinger und Heisenberg. Erläuterungen des formalen Störungsansatzes an Beispielen Heisenbergscher Matrizen wie Schrödingerscher Energieoperatoren nehmen dabei einen sehr großen Raum ein. Kapitel 3 bringt eine Einführung in die Theorie allgemeiner linearer Operatoren im Hilbertraum, Kapitel 4 nachfolgend eine Darstellung des Spektralsatzes für selbstadjungierte und unitäre Operatoren, ferner der mit diesem Satz zusammenhängenden Theorie, die in Formulierung und Beweisen sich wesentlich auf J. v. Neumann bezieht. In Kapitel 5 folgt Diskussion einer größeren Anzahl anderer Beweise und Darstellungen des Spektralsatzes und seiner Theorie, insbesondere diejenigen von Stone, Hellinger, Lenglvel, Riesz-Lorch, Wintner und Cooper. Kapitel 6 enthält Betrachtungen über topologische Vektorräume, im wesentlichen unter Anlehnung an Köthe und Töplitz und insbesondere für Matrizenräume und Matrizenringe. Kapitel 7 schließlich befaßt sich mit Banachalgebren. Es handelt sich im wesentlichen um die Gelfandsche Theorie der Banachalgebren mit Anwendung auf die Sätze von Wiener über absolute Konvergenz von Fourierreihen. H. O. Cordes.

• Nakano, H.: Spectral theory in the Hilbert space. Tokyo: Japan Soc. for the Promotion of Science 1953. 300 p. § 3,—.

Nach einem einleitenden 1. Kapitel über die Grundtatsachen der Theorie des Hilbertraumes beliebiger Dimension entwickelt Verf. die von ihm in einer früheren Veröffentlichung (Modern Spectral Theory, dies. Zbl. 41. 234) als zweite Spektraltheorie bezeichnete Theorie für abgeschlossene kommutative Ringe \mathfrak{R} von Projektionen P im Hilbertschen Raum R . Mit $\overline{\mathfrak{R}}$ wird der Ring aller mit allen $P \in \mathfrak{R}$ vertauschbaren Projektionen bezeichnet. Durchläuft P ganz \mathfrak{R} , so spannen die Pa , $a \in R$, einen abgeschlossenen linearen Teilraum auf, dessen Projektion $[a]$ heißt. Mit $C_{\mathfrak{R}}$ wird $\bigcup_{P \in \mathfrak{R}} P$ bezeichnet, ferner sei $C_a = C_{\mathfrak{R}} \cap P$, wobei P alle $P \in \mathfrak{R}$ mit $[a]P = 0$ durchläuft. Liegt jedes $[a]$, $a \in R$, in \mathfrak{R} , so heißt \mathfrak{R} einfach. Dem Ring \mathfrak{R} wird der Eigenraum $\mathfrak{E}_{\mathfrak{R}}$ der maximalen dualen Ideale \mathfrak{p} des Booleschen Ringes \mathfrak{R} zugeordnet. Die jedem $P \in \mathfrak{R}$ entsprechenden Mengen U_P , aller $\mathfrak{p} \supseteq P$ als offene Mengen machen $\mathfrak{E}_{\mathfrak{R}}$ zu einem kompakten Raum, umgekehrt entspricht jeder offenen und abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathfrak{E}_{\mathfrak{R}}$ eine Projektion P_A auf diese Weise (Stone). Für eine total additive Funktion $\mu(P)$ auf \mathfrak{R} [$\mu(P \vee Q) = \mu(P) + \mu(Q)$ für $PQ = 0$ und $\mu(P_n) \rightarrow 0$ für $P_n \downarrow 0$] und stetige Funktionen $q(\mathfrak{p})$ auf \mathfrak{R} werden die Integrale $\int_P q(\mathfrak{p}) \mu(d\mathfrak{p})$ als Grenzwerte von Summen $\sum q(\mathfrak{p}_r) \mu(P_r)$ über orthogonale Zerlegungen $P = \sum P_r$ eingeführt, ebenso Integrale $\int_P q(\mathfrak{p}) d\mu a$ als Grenzwerte von Summen $\sum q(\mathfrak{p}_r) P_r a$. Als das relative Spektrum von b bezüglich a wird für jedes $\mathfrak{p} \in U_{[a]}$ erklärt $(b/a, \mathfrak{p}) = \lim_{P \rightarrow \mathfrak{p}} \{(Pb/a) | |Pa|^2\}$. Es ist $(b/a, \mathfrak{p})$ stetig in \mathfrak{p} , und es gilt die Integraldarstellung $[a]b = \int_{C[a]} (b/a, \mathfrak{p}) d\mu a$.

Kap. III beschäftigt sich mit Dilatoren, das sind abgeschlossene, mit $\overline{\mathfrak{R}}$ vertauschbare Operatoren. Ist $q(\mathfrak{p})$ eine stetige Funktion auf $\mathfrak{E}_{\mathfrak{R}}$ ($\pm \infty$ als Werte sind zugelassen, q muß aber in einer offenen dichten Menge endlich sein) und ist D die Menge aller $x \in R$ für die q in $U_{C[x]}$ integrierbar ist, so stellt das Integral $\int_{C[x]} q(\mathfrak{p}) d\mu a$ einen Dilator Tx auf D dar, der als $\int q(\mathfrak{p}) d\mu$ bezeichnet wird. Umgekehrt läßt sich jeder Dilator so schreiben. Im Fall $\mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{R}}$ wird $q(\mathfrak{p}) = (Tx/x, \mathfrak{p})$. Die Funktion $q(\mathfrak{p}) = (T, \mathfrak{p})$ wird als das Spektrum von T bezeichnet. Die T zugeordnete Spektralschar erhält man so: Zu $q^{-1}(\Phi) \subseteq \mathfrak{E}_{\mathfrak{R}}$, Φ eine Teilmenge der komplexen Ebene, läßt sich, wenn Φ etwa eine Borelmenge ist, der zugehörige Projektionsoperator $E(\Phi) = P_{q^{-1}(\Phi)}$ bilden. Es zeigt sich, daß diese Spektralschar nicht von \mathfrak{R} abhängig ist. Es wird ein Operatorenkalkl mit den Spektren entwickelt z. B. wird $|T| = \int |(T, \mathfrak{p})| d\mu$ ein positiver Operator, $|T| = \int |(T, \mathfrak{p})| d\mu$ gesetzt. Es werden weiter allgemeine Spektralmaße betrachtet, jeder Operator $\int \psi(\xi) E(\xi) d\mu$

wird wieder ein Dilator und sein Spektrum (T, p) wird bestimmt. — Im Kap. IV werden normale, selbstadjungierte, unitäre usw. Operatoren betrachtet. Es wird bewiesen, daß ein normaler Operator als Dilator eines geeigneten abgeschlossenen Projektionsringes, der 1 enthält, aufgefaßt werden kann; damit ergibt sich die übliche Spektraldarstellung als Spezialfall der vorigen Theorie. (H, p) reell bzw. $|(U, p)| = 1$ charakterisiert die selbstadjungierten bzw. unitären Operatoren. — Kap. V behandelt die unitären Invarianten von \mathfrak{H} . Jeder einfache Ring hat eine bestimmte Multiplizität, jedes \mathfrak{H} zerfällt eindeutig in Ringe \mathfrak{H}_p verschiedener Multiplizitäten. Jedem $p \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{H}}$ wird ebenfalls eine Kardinalzahl als Multiplizität $m(p)$ zugeordnet. $m(p)$ ist stetig auf $\mathfrak{G}_{\mathfrak{H}}$, und zwei Ringe \mathfrak{H} und \mathfrak{K} sind dann und nur dann unitär äquivalent, wenn es eine Homöomorphie von $\mathfrak{G}_{\mathfrak{H}}$ auf $\mathfrak{G}_{\mathfrak{K}}$ gibt, bei der die Multiplizitäten erhalten bleiben. Zu vorgegebenen $m(p)$ gibt es stets ein \mathfrak{H} mit diesen Multiplizitäten. Ebenso werden Spektralmaße und Systeme von Dilatoren durch analog konstruierte Multiplizitätsfunktionen invariant charakterisiert. Das letzte Kapitel behandelt kurz die Ergodentheorie. — Der hier eingeschlagene Weg dürfte sich als Begründung der klassischen Spektraltheorie wegen der nur über das Auswahlaxiom erreichbaren $p \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{H}}$ kaum empfehlen, gibt jedoch einen interessanten Zugang zur Theorie der unitären Invarianten.

G. Köthe.

Shimoda, Isac: Notes on general analysis. II. J. Gakugei Tokushima Univ., natur. Sci. 3, 12—15 (1953).

(Part I cf. this Zbl. 49, 355). The paper deals with analytic functions whose arguments and values lie in complex Banach spaces. The following theorems about such functions are proved: (1) A function is a homogeneous polynomial of degree n if and only if it is defined and analytic on the whole space, and homogeneous of degree n . (2) (Generalization of Schwarz's lemma) If $f(0) = 0$, if f is analytic and $\|f(x)\| \leq M$ when $\|x\| = R$, then $\|f(x)\| \leq M \|x\|$ when $\|x\| = R$. Equality here can occur at a point without occurring at all points. Two more theorems are stated. These are part of a study of the boundary of the maximal open set in which a power series converges. This part of the paper is obscure to the reviewer, partly because of lack of clarity in a definition, and partly because of an apparent confusion between the failure of a power series to converge at a point, and the lack of an analytic continuation into a neighborhood of that point. A. E. Taylor (Math. Reviews 15, 38).

Ghermanescu, M.: Sur l'équation fonctionnelle $E(f) = \sum_0^p A_i f(x + \omega_i) = 0$. Comun. Acad. Republ. popul. Române 3, 187—192, russ. und französ. Zusammenfassg. 192 (1953) [Rumänisch].

Eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 9, 214) fortsetzend, gibt Verf. einige Lösungen der im Titel stehenden Differenzengleichung an, unter der Voraussetzung, daß die Konstanten $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ positive Realteile besitzen ($\omega_0 = 0$). So nennt er elementare Lösungen solche, die von der Gestalt $f(x) = \sum_{j=1}^n P_j(x) e^{z_j x}$ sind, wo die

z_j Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\theta(z) \equiv A_0 + A_1 e^{\omega_1 z} + A_2 e^{\omega_2 z} + \dots + A_p e^{\omega_p z} = 0$$

sind und jedes $P_j(x)$ je ein Polynom von niedrigerem Grad als die Multiplizität der Wurzel z_j ist. Verf. nennt spezielle Lösungen solche, die von der Gestalt

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{zx} \frac{\psi(z)}{\theta(z)} dz \text{ sind, wo } C_r \text{ ein Kreis } |z| = r \text{ ist und } \psi(z) \text{ in diesem Kreis}$$

holomorph ist. Endlich befaßt sich Verf. mit dem Zusammenhang dieser zwei Arten von Lösungen. Beweise im engeren Sinne des Wortes werden im allgemeinen nicht gegeben. Einige Grenzübergangsmöglichkeiten werden auch erwähnt, ebenfalls ohne Beweis. Manche Druckfehler stören das Lesen der übrigens auch für den des Rumänischen nicht mächtigen Leser leicht verständlichen Arbeit, so sollte z. B. in der

10-ten Zeile der Seite 189 $q(z)$ statt $\psi(z)$ stehen und in der Formel (17) natürlich Multiplikation statt des zweiten Gleichheitszeichens. *J. Aczél.*

Ghermănescu, M.: Sur l'équation fonctionnelle $E_r(f) = \sum_{i=0}^r P_i(x) f(x + \omega_i) = 0$.

Comun. Acad. Republ. popul. Romîne 4, 341—343, russ. und französ. Zusammenfassg. 343 (1954) [Rumänisch].

Seine vorstehend referierte Arbeit fortsetzend untersucht der Verf. die im Titel stehende Differenzengleichung, wo die $P_i(x) = \sum_{j=1}^r \alpha_j^i (x + \omega_i)^{r-j}$ Polynome höchstens r -ten Grades und die ω_i ($i = 1, 2, \dots, p$; $\omega_0 = 0$) wieder Konstanten mit positiven Realteilen sind. Er sucht Lösungen der Gestalt (*) $f(x) = \int e^{zx} V(z) dz$ und skizziert, daß solche entstehen, wenn $V(z)$ einer Differentialgleichung

$$\sum_{j=0}^r (-1)^j \frac{d^{r-j} V}{dz^{r-j}} \sum_{i=1}^p \alpha_j^i e^{\omega_i z} = \varphi(z)$$

mit im Inneren der geschlossenen Kurve C holomorphen $q(z)$ genügt, falls die Integration in (*) auf dem geschlossenen Wege C geschieht, während $q(z) \equiv 0$ gewählt werden soll, falls es zwei Konstanten gibt, in welchen ein gewisser ausintegrierter Teil den gleichen Wert annimmt, und zwischen welchen dann die Integration in (*) durchgeführt wird. Die Darstellung ist auch für den leicht verständlich, der die Sprache nicht kennt. *J. Aczél.*

Praktische Analysis:

Bers, Lipman: On mildly nonlinear partial difference equations of elliptic type. J. Res. nat. Bur. Standards 51, 229—236 (1953).

Das Randwertproblem für die nichtlineare elliptische Differentialgleichung $\Delta U = f(x, U, \nabla U)$ wird zunächst ersetzt durch das entsprechende Problem einer zugeordneten Differenzengleichung, dessen Lösung nach dem Liebmannschen Iterationsverfahren konstruiert werden kann. Strebt die der Differenzengleichung zugrundegelegte Maschenweite gegen 0, so ergibt sich in der Grenze die gesuchte Lösung der elliptischen Differentialgleichung. *Claus Müller.*

Samuelson, Paul A.: Rapidly converging solutions to integral equations. J. Math. Physics 31, 276—286 (1953).

The author considers the Fredholm integral equation

$$E(x, z) = F(x, z) + U(x, z) + \int_a^b K(x, s) U(s, z) ds = 0,$$

the corresponding operator equation being $F : U \cdot K \cdot U = E(U, F, K) = 0$. It is assumed that one and only one solution U exists. He proposed the iteration method $U_{n+1} = U_n - E(F, U_n, K) - j \cdot E(F, U_n, K)$ with j as arbitrary integral operator. This generalizes the well known method of Neumann ($j = 0$) and gives the exact solution $U_{n+1} = U$ for $j = k$, k denoting the operator of the reciprocal kernel of K . In order to ensure and to speed up convergence of the sequence U_n , j should be taken as approximation to k . Some other methods, hitherto proposed, are covered by the author's iteration. The case $j = \text{const} \neq 0$ presents the iteration as investigated by Wiarda and Bückner. The case

$$j(x, z) = j(x) = -\bar{K}(x)/(1 + (b - a)K)$$

with \bar{K} as mean of $K(x, z)$ over z and \bar{K} as mean of $K(x, z)$ over x and z gives the method of C. Wagner. Some other cases with a degenerate $j(x, z)$ are also discussed, and numerical examples are compared with each other. In a quite natural way, the author finds the iteration $k_{n+1} = k_n - (1 + k_n) \cdot E(K, k_n, K)$ for calculating the

reciprocal kernel k . He notes that this is already known for inverting matrices. Application to integral equations, however, has already been recommended by Bodevig some years ago. [See Bückner, *Die praktische Behandlung von Integralgleichungen*. Springer, Berlin 1952 (this Zbl. 48, 357), § 23.]

H. Bückner (Math. Reviews 14, 503).

Svirskij, I. K.: Über eine Abschätzung der Genauigkeit von Näherungsmethoden zur Bestimmung der Frequenzen von Schwingungen. *Izvestija Kazansk. Fil. Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz.-mat. techn. Nauk* 3, 59–86 (1953) [Russisch].

In calculating the frequency of the fundamental type of vibration of a complicated system approximate methods are usually applied and the frequency of vibrations obtained hereby is higher than its exact value. In this paper one gives a method which determines the approximate value lower than its exact value, and there exists the possibility of control. The basic idea of this method is to apply a simple operator which has lower value than the exact value, but the determination of the eigenfrequencies is very easy. Let be ψ_i a set of vectors of Hilbert space and q the approximate value of this vector, then $Hq - \lambda q = 0$, $q = \sum C_i \psi_i$ where λ is an approximate value of the eigenvalue and H the operator. As one example the string problem is discussed. The problem of the vibration of thin rectangular plate is treated also. The different operators are determined using Galerkin's method. Further, one treats a second method for approximation of operators. One example illustrating the method of estimation of the accuracy of the calculating is given, namely, the problem of vibration of a square plate free supported at the edges on elastic foundation. Finally one treats the determination of the number of negative eigenvalues of operators.

D. Rašković.

Ionescu, D. V.: Formules de cubature, le domaine d'intégration étant un triangle quelconque. *Acad. Republ. popul. Române, Bul. ști., Sect. Ști. mat. fiz.* 5, 423–429, russ. und französ. Zusammenfassg. 430 (1953) [Rumänisch].

Sia T un triangolo qualunque e L_i, M_i, N_i i baricentri corrispondenti alle masse $(a_i, 1, 1)$, $(1, a_i, 1)$, $(1, 1, a_i)$ situate nei vertici A, B, C di esso ($i = 1, 2, \dots, n$). L^2A , stabilisce le formole di cubature di forma

$$(a) \quad \iint_T f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n P_i [f(L_i) + f(M_i) + f(N_i)],$$

che risultano esatte per polinomi $f(x, y)$. Si dimostra che le formole di tipo (a) sono impossibili se $n > 5$, esse sono generalmente possibili se $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \dots (a_{n-1} - a_n) \neq 0$ per $n \leq 5$ e sono certamente possibili se inoltre uno dei numeri a_i diventa uguale ad uno.

D. J. Mangeron.

● Keister, William, Alistair E. Ritchie and Seth H. Washburn: *The design of switching circuits*. With a foreword by John Meszar. (The Bell Telephone Laboratories Series.) Third printing 1953. New York and Toronto: D. van Nostrand Company 1951. XVIII, 556 p.

Verff. geben mit diesem Buch einen systematischen Lehrgang zum Entwerfen von Schaltungen, die wesentlich irgendwelche gesteuerten Schalter enthalten. Vorzugsweise werden dabei Schaltungen mit Relais behandelt, aber auch auf elektronische Schalter wird eingegangen. — Zunächst wird der allgemeine Aufbau von Relais, die verschiedenen Anordnungen der Kontaktfedern und der Windungen und deren grundsätzliche Verwendung in Schaltungen beschrieben; auch Relais für Spezialzwecke werden eingehend erörtert. Es folgen Kapitel über das Zusammenwirken mehrerer Kontakte und dessen (bekannte) algebraische Behandlung vermittels einer Booleschen Algebra. Es schließen sich Ausführungen über Relaisanordnungen an, die von mehreren Eingangsimpulsen gesteuert werden, unterteilt in solche, bei denen die Eingangsimpulse gleichzeitig vorliegen oder in einer festgelegten Reihenfolge eintreffen müssen. Es werden Diagramme angegeben, die

in komplizierten Fällen den zeitlichen Ablauf der Schaltvorgänge zu überblicken gestatten. — Dann werden, vom Einfacheren zum Komplizierteren aufsteigend, Schaltungen für „verschiedene Einzelaufgaben besprochen. Erwähnt seien: Impulsfrequenzteiler, Zählerschaltungen (wobei verschiedene Ziffernsysteme besprochen werden). Übersetzer für codierte Befehle. Besonderes Gewicht legen die Verf. auf einige Aufgaben, die der Fernsprechartstechnik entnommen sind, wie Schaltungen, um die Verbindung zu einem gewünschten oder zu einem die Verbindung wünschenden Teilnehmer herzustellen, Verhinderung von Doppelverbindungen sowie Trennung vorhandener Verbindungen, falls ein neu ankommendes Gespräch Vorrang genießt. Schaltungen zum Aufsuchen unbesetzter Verbindungswege. Weitere im Buche behandelte Aufgaben sind Verzögerungsschaltungen mit gewünschten Zeitkonstanten, Impulsgeber, Prüfungsschaltungen, Speichern von Informationen, Schaltungen für einfache Rechenoperationen (nämlich Komplementbildung, die vier Grundrechenarten und Quadratwurzelziehen). Abschließend werden noch Gesichtspunkte für das Entwickeln komplizierterer Schaltungen gegeben, die im allgemeinen auf die vorgenannten Einzelaufgaben zurückführbar sind. Zur Erläuterung dient wiederum ein Beispiel aus der Fernsprechartstechnik. — Den meisten Kapiteln sind Probleme (ohne Lösungsangabe, aber mit Hinweisen auf die zur Lösung erforderlichen Mittel) angefügt, die zur selbständigen Lösung von Konstruktionsaufgaben hinleiten. — Die empfohlene Methode des Vorgehens beim Entwickeln von Schaltungen ist zwar im allgemeinen methodisch, stützt sich aber nur gelegentlich auf Verfahren, die im engeren Sinne zur Mathematik gehören. — Für den Mathematiker dürften (neben der überall spürbaren Beziehung zur mathematischen Logik) noch insbesondere von Interesse sein: die Bemerkungen über Ziffernsysteme, die Beschreibung solcher Codes, bei denen einfache Übermittlungsfehler selbsttätig entdeckt und unter Umständen auch selbsttätig korrigiert werden können, sowie die 36 Seiten des Buches, die den Rechenschaltungen gewidmet sind.

A. Stöhr.

Vowels, R. E.: The application of statistical methods to servomechanisms. Austral. J. appl. Sci. 4, 469—488 (1953).

Der Aufbau von Servomechanismen kann auf statistischer Basis erfolgen. Das ermöglicht eine eingehende Betrachtung des Zusammenhanges zwischen den optimalen Übertragungseigenschaften eines derartigen Systems und den zugehörigen Fehlerquellen.

H. J. Kopineck.

Holecek, K.: Ein Beitrag zum Maschinenrechnen. Die Berechnung vielstelliger Quotienten nach dem Aufbauverfahren. Österreich. Ingenieur-Arch. 7, 331—336 (1953).

Für die Quotientenberechnung werden bei Handrechenmaschinen zwei Verfahren angewandt: 1. das Abbauverfahren, nämlich die fortlaufende Subtraktion des Divisors vom Dividenten und 2. das Aufbauverfahren, bei dem nach Einstellung des Divisors im Einstellwerk durch fortgesetzte Addition der Divident im Hauptzählwerk aufgebaut wird, wobei im Umdrehungszählwerk der Quotient erscheint. Für beide Verfahren wird gezeigt, wie man zweckmäßig vorgeht, wenn man mehr Quotientenstellen berechnen will, als die Kapazität der Rechenmaschine gestattet. Im ersten Fall muß man in bekannter Weise mit dem Divisionsrest als neuem Dividenten die Subtraktion fortsetzen und erhält so weitere Zifferngruppen des Quotienten. Beim Aufbauverfahren wird gezeigt, daß man den ersten Überschuß über den Dividenten unmittelbar zur Fortsetzung des Verfahrens benutzen kann, wenn man das Umdrehungszählwerk bei der Berechnung der zweiten Zifferngruppe umsteuert, also die Komplementzahl verwendet und so turnusmäßig weitere Zifferngruppen des Quotienten gewinnt. Dieses Verfahren wird ausführlich an einem Zahlenbeispiel erläutert.

G. Koehler.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Richter, Hans: Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie. III: Die Begründung des Additions- und des Multiplikationssatzes. IV: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Ann. 125, 335—343; 126, 362—374 (1953).

(Teil I, II s. dies. Zbl. 48, 359, 51, 102). In Teil II wurde die Begründung des Additions- und Multiplikationssatzes auf „Satz 2“ zurückgeführt, demgemäß sich jedes EK-System (System von „Erwartungskoeffizienten“) in ein „System von Wahrscheinlichkeiten“ transformieren läßt. (Genaue Formulierung in Teil II: S. 233.) Es werden hier die in früheren Teilen (§§ 5—7) anschaulich gegebenen Axiome streng gefaßt und dabei A) Axiome der Schemata, B) Belegungsaxiome unterschieden (§ 11). Sodann wird in § 12 der vollständige Beweis des angekündigten Transformationssatzes gegeben. — Die Gesamtheit der Folgerungen, die aus dem in den vorhergehenden Teilen angegebenen Axiomensystem gezogen werden können, wird als direkte Wahrscheinlichkeitstheorie bezeichnet. Dazu gehört auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung als Lehre von den Sätzen, die in jedem p -System aus Additions- und Multiplikationssatz folgen. Eine gewisse Erweiterung des Axiomensystems ist nötig, um die „bedingten“ Wahrscheinlichkeiten einzuführen. Der Durchführung dieses Programms mit dem Ziele, die Beziehungen zur üblichen Wahrscheinlichkeitstheorie herzustellen, ist dieser IV. Teil gewidmet. Die Titel der einzelnen Abschnitte sind: Unverfälschtheit und Unabhängigkeit. — Aleatorische Größen. — Bedingte Wahrscheinlichkeiten. — Rückschlußwahrscheinlichkeiten. — Klasseneinteilung der p -Systeme.

H. Geiringer.

Richter, Hans: Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie. V: Indirekte Wahrscheinlichkeitstheorie. Math. Ann. 128, 305—339 (1954).

(Vgl. das vorangehende Referat). In diesem fünften abschließenden Teil untersucht Verf. die Grundlegung des Rückschlusses, der ja für die auf der Wahrscheinlichkeitstheorie aufgebaute theoretische Statistik von fundamentaler Bedeutung ist. Die Fragestellung steht im Gegensatz zur direkten Theorie. Beim Aufbau der indirekten Theorie ist es möglich die „Änderungsvorschriften“ „Subjektivisten“ und „Objektivisten“ als Eines zu betrachten, wenn man die subjektivistische Wahrscheinlichkeit mit der objektivistischen „Chance“ identifiziert. — Es ist dem Ref. nicht möglich, in wenigen Sätzen die Grundgedanken dieser langen und schwierigen Arbeit herauszustellen, die sich mit vielen Problemen befaßt und auch Resultate der vorhergegangenen vier Teile voraussetzt.

H. Geiringer.

Blanc-Lapierre, A.: Considérations sur la théorie de la transmission de l'information et sur son application à certains domaines de la physique. Ann. Inst. Henri Poincaré 13, 245—296 (1953).

Die Arbeit enthält Vorlesungen des Verf., die im Institut Poincaré in Paris im April 1953 gehalten wurden. Sie besteht aus drei Teilen. Teil I enthält eine kurzgefaßte Darstellung der grundlegenden Begriffe der Informationstheorie. Teil II beschäftigt sich mit stochastischen Prozessen mit stetiger Zeit und beschränktem Spektrum. Solche Prozesse kann man darstellen durch ihre Werte für eine abzählbar unendliche, äquidistante Folge von diskreten Zeitpunkten. Es werden besonders die Prozesse untersucht, bei welchen diese Werte unkorreliert bzw. unabhängig sind. Teil III beschäftigt sich mit den Anwendungen der Informationstheorie in der Optik [siehe auch die frühere Arbeit des Verf. „Transposition au domaine de l'Optique de certains résultats de la théorie de l'Information“ [Bull. Soc. Franc. Electr. 7^e Sh. Bd. 2, 481 (1952)]. Es wird gezeigt, daß die Ideen der Informationstheorie in diesem vom Gebiet der Nachrichtenübertragung — auf dessen Grund diese Ideen entstanden sind — weitliegenden Gebiete der Physik sich ganz besonders nützlich und adäquat erweisen.

A. Rényi.

Mandelbrot, Benoit: Contribution à la théorie mathématique des jeux de communication. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 2, Nr. 1/2, 3—124 (1953).

Présentation axiomatique, de niveau très abstrait et très élevé, et de style très personnel, de la théorie de l'information. Définition générale de la notion d'information englobant les diverses expressions connues (Schützenberger). Relation à la thermodynamique. Relation à la transmission, au codage et au décodage des signaux. Application à la linguistique. Ce „Referent“ est obligé d'avouer à la fois son peu de compétence en ce domaine, et le très grand intérêt qu'il a pris à s'y instruire.

O. Costa de Beauregard.

Schützenberger, M. P.: Remarques sur le problème du codage binaire. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 2, Nr. 1/2, 125—128 (1953).

Le problème du codage optimum [distance de Hamming entre deux mots maximale] est quelquefois ramenable au problème statistique des „balanced block designs“.

B. Mandelbrot.

Zadeh, L. A.: Theory of filtering. J. Soc. industr. appl. Math. 1, 35—51 (1953).

A filter F is ideal, relative to the sets of signals X and Y , and to the combination operation $*$, if, for any $x(t) \in X$ and $y(t) \in X$, $F(x * y) = x$, almost everywhere. Let U be the set of $(x * y)$, and let X, Y, U be (non-linear) manifolds in a euclidean space Σ . Then, it is necessary that $\dim(X) + \dim(Y) \leq \dim(\Sigma)$ (where $\dim(X)$ is the dimension of X). Let now Y be noise, with $\dim(X) = \dim(\Sigma)$: the filter designer has control over X . But the relationship between dimensions requires that $\dim(X) = 0$, so that ideal filtering is possible only if the coded message is discrete. Non-ideal optimal filters are then discussed, and the method of least distance is analyzed (in particular in the case of power filters).

B. Mandelbrot.

Davis, R. C.: On the Fourier expansion of stationary random processes. Proc. Amer. math. Soc. 4, 564—569 (1953).

It is generally considered that the Fourier coefficients a_n, b_n of a continuous quasistationary stochastic process $x(t)$ — for any observation interval $0, T$ — are uncorrelated random variables i. e.: $E(a_n a_m) = 0$ if $m \neq n$, $E(a_n b_n) = 0$ supposing $E(x(t)) = 0$. The author voids the illusion hidden under this assumption. This paper shows namely that if the preceding correlations are null for any T , the process is degenerated, under the condition that the corresponding Fourier series converges in mean. The reciprocal theorem is also right.

O. Onicescu.

Itô, Hiroshi: Observed value of the autocorrelation function. Proc. Japan Acad. 29, 198—202 (1953).

Let $f(t)$ ($-\infty < t < \infty$) be a stationary stochastic process with the autocorrelation function $q(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t + \tau) f(t) dt = E(f(t + \tau) f(t))$. In the measurement of $q(\tau)$ there is a fluctuation of the delay time τ due to the uncertainty relation between the time and the frequency so that the estimator of $q(t)$ will be $\frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N f(t_i + \tau + \eta) f(t_i)$ where η is a random variable, giving the mistake in the measurement of τ . It is supposed that $E(\eta) = 0$, η is independent of the process $f(t)$ and the distribution of η does not depend on τ and on the time t to which the delay $\tau + \eta$ corresponds. Denoting by $\Phi(\omega)$ the spectral density corresponding to $q(\tau)$ and by $g(\omega)$ the characteristic function of the random variable η , it is proved that $E(f(t + \tau + \eta) f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\omega} g(\omega) \Phi(\omega) d\omega$ and $E(f(t + \tau + \eta) f(t + \eta)) = q(\tau)$.

A. Prékopa.

Itô, Hirosi: The observation theory of the stationary random process. Proc. Japan Acad. **29**, 305—310 (1953).

In a previous paper (cf. the preceding review,) the author has investigated the influence of the fluctuation in the measurement of the delay time concerning a stationary random process. In the present paper uncertainty relations of the Heisenberg type are established between the time t and the frequency ω concerning the above process. A special entropy H is defined and calculated in some cases. (For another study see Blanc-Lapierre and Fortet, *Théorie des fonctions aléatoires*, cf. this Zbl. **51**, 357). *A. Prékopa.*

Ramakrishnan, Alladi and P. M. Mathews: On a class of stochastic integro-differential equations. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **38**, 450—466 (1953).

Let $E(t)$ be a stochastic process representing the varying energy of a particle. The variation of $E(t)$ is effected by random and deterministic changes. The first ones are governed by the conditional probabilities $\pi(E|E_0, t)$, $R(E'|E)$, where $\pi(E|E_0, t)$ is the probability that the energy assumes a value between E and $E + dE$ at $t_0 + t$ if it had the value E_0 at t_0 , and $R(E'|E) dE' dt$ is the probability that the energy jumps from E to the interval $(E', E' + dE')$ during the time dt ($R(E'|E) = 0$ if $E' < E$). To this random change a deterministic change is added the value of which during dt equals $\pm \beta(E) dt$ if the energy has the value E . β is always positive while the signs \pm represent two special cases and remain unchanged in the time. The following integrodifferential equation is given:

$$\begin{aligned} & \partial \pi(E|E_0, t) / \partial t \pm \partial \{ \beta \pi(E|E_0, t) \} / \partial E = \\ & - \pi(E|E_0, t) \int_0^E R(E'|E) dE' + \int_0^\infty \pi(E'|E_0, t) R(E|E') dE'. \end{aligned}$$

This equation with $+\beta$ is the fundamental equation of the fluctuations in brightness of the Milky Way. Two special cases are considered. i. $\beta(E)$ is independent of E . If $\beta > 0$ and $t \rightarrow \infty$, $\pi(E|E_0, t)$ tends to a stationary distribution obtained previously by Chandrasekhar and Münch [Astrophys. J. **112**, 380—392, 393—398 (1950)]. The probability of $E = 0$ at time t is also calculated. ii. In this case $\beta = 0$ and is supposed that if the energy E changes to E' at a jump, then E'/E is uniformly distributed in $(0, 1)$. In both cases the solutions and some physical examples are given. *A. Prékopa.*

Nisida, Tosio: On some probability distributions concerning Poisson process. Math. Japonicae **3**, 7—12 (1953).

Some simple and partly well-known statements are proved for homogeneous Poisson processes. *A. Prékopa.*

Pollaczek, Félix: Généralisation de la théorie probabiliste des systèmes téléphoniques sans dispositif d'attente. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 1469—1479 (1953).

Tanner, J. C.: A problem of interference between two queues. Biometrika **40**, 58—69 (1953).

Es wird die mittlere Wartezeit, die durch zwei entgegengesetzte Fahrzeugströme an den Endpunkten A und B einer Enge verursacht wird, untersucht. Dabei wird angenommen, daß die Fahrzeuge in A und B zufällig mit den mittleren Häufigkeiten q_1 und q_2 pro Zeiteinheit eintreffen und A bzw. B nur passieren, wenn sich kein in entgegengesetzter Richtung fahrendes Fahrzeug in AB befindet und kein Fahrzeug A in Richtung B in den letzten β_1 (bzw. B in Richtung A in den letzten β_2) Zeiteinheiten durchfahren hat. Die Fahrtdauer von A nach B betrage α_1 , die von B nach A α_2 Zeiteinheiten. Für den Fall $\alpha_1 > \beta_1$, $\alpha_2 > \beta_2$ wird für die mittleren Wartezeiten \bar{w}_1 und \bar{w}_2 der Fahrzeuge in A bzw. B eine allgemeine Lösung untersucht, für Spezialfälle sind explizite Lösungen angegeben und \bar{w}_1 für $\beta_1 = \beta_2 = 0$,

$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, \bar{w}_2 für $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, $\alpha_1 = 1$ in Abhängigkeit von q_1, q_2 bzw. q_1, β_1 tabelliert.
E. Walter.

Singer, K.: Application of the theory of stochastic processes to the study of irreproducible chemical reactions and nucleation processes. J. Roy. statist. Soc., Ser. B 15, 92—106 (1953).

The author gives a mathematical theory for irreproducible chemical reactions where the irreproducibility is due to the inherent mechanism of the process. From the mathematical point of view a chemical reaction process of this type can be considered as a vector-valued stochastic process $\mathbf{n}(t) = (n_1(t), \dots, n_r(t))$, where r is the number of the different molecular species and $n_k(t)$ is the number of molecules of the type k at time t . It is supposed that the reacting system has a constant volume during the reaction process, which has the consequence that the transition probabilities from a state to neighbouring states are independent of the time t . Let $P(\mathbf{n}; t)$ denote the probability that at time t the system is in the state \mathbf{n} . The following system of differential equations holds:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} P(\mathbf{n}; t) = \sum_{(i)} [f_i(\mathbf{n}'_i) P(\mathbf{n}'_i; t) - f_i(\mathbf{n}) P(\mathbf{n}; t)]$$

where \mathbf{n}'_i denotes a state from which an elementary transition leads to the state \mathbf{n} , the summation is extended over all indices i of elementary transitions and $f_i(\mathbf{n}) dt$ is the probability that if at time t the system is in state i , an elementary transition of the type i occurs during the time interval $(t, t + dt)$. $f_i(\mathbf{n})$ has the form $k_i n_1^{r_1} \dots n_r^{r_r}$, where k_i is a constant (depending on the temperature) and r_1, \dots, r_r are integers, which define the order of the reaction. Detailed examples for chain reactions without

and with branching are given. The quantities $M_k(\mathbf{n}) = \int_0^\infty t^k P(\mathbf{n}, t) dt$ are also considered. $M_0(\mathbf{n})$ is the average time the system spends in the state \mathbf{n} during the reaction process and $M_k(\mathbf{n})$ is defined by $T^{(k)}(\mathbf{n}) = M_k(\mathbf{n}) / M_0(\mathbf{n})$, where $T_k(\mathbf{n})$ is the mean value of the average k -th power of t -values in which the system is in the state \mathbf{n} . In case $r = 1$ a method is given for the calculation of the probability that the system reaches the state \mathbf{n} first at time t and an example for a second order reaction is given. The paper has particular interest in paying great attention to chemical aspects.

A. Prékopa.

Maruyama, Gísirō: Markov processes and stochastic equations. Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 4, 40—43 (1953).

The present paper is devoted to the study of one-dimensional continuous Markov processes by means of the diffusion coefficients and of a certain stochastic equation. Thus, suppose that $a(t, x)$ and $b(t, x)$ are two real-valued continuous functions defined on $T \times R$ (here $T = [0, 1]$ and R is the real axis) verifying the Lipschitz condition

$$|a(t, x) - a(t, x')| + |b(t, x) - b(t, x')| < C |x - x'|$$

and $\Delta = (t_j)_{0 \leq j \leq n}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, is a division of T ; if

$$y_n = y_{n-1} + a(t_{n-1}, y_{n-1}) \Delta t_{n-1} + b(t_{n-1}, y_{n-1}) \Delta x_{n-1}, \quad 1 \leq n < \infty,$$

and

$$y_\Delta(t) = y_\mu + a(t_\mu, y_\mu) (t - t_\mu) + b(t_\mu, y_\mu) (x(t) - x(t_\mu)),$$

where $x_r = x(t_r)$, $\Delta x_{r-1} = x_r - x_{r-1}$, $\Delta t_{r-1} = t_r - t_{r-1}$, $t_\mu \leq t < t_{\mu+1}$, then for every $t \in T$ in the L^2 -sense l. i. m. $y_\Delta(t) = y(t)$, $\varrho(1) = \max_{1 \leq r \leq n} \Delta t_{r-1}$, and $y(t)$ is the unique solution of the Itô stochastic integral equation

$$(*) \quad y(t) = y_0 + \int_0^t a(\tau, y(\tau)) d\tau + \int_0^t b(\tau, y(\tau)) dx(\tau),$$

i. e. $y(t)$ is continuous with probability one and represents a Markov process verifying the Kolmogorov-Feller conditions [here $x(t)$ is the Brownian motion, $x(0) = 0$, $E(|x(t)|^2) = |t|$]. Now let $(y^{(n)}(t))_{1 \leq n < \infty}$, $t \in T$, be a sequence of Markov processes; under certain conditions verified by the transition probabilities the sequence $(y^{(n)}(t))_{1 \leq n < \infty}$ converges in probability to the solution $y(t)$ of (*). Further, under the same conditions

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \{f(t) \leq y^{(n)}(t) \leq g(t), \quad t \in T\} = \Pr \{f(t) \leq y(t) \leq g(t), \quad t \in T\},$$

where $f(t)$ and $g(t)$ are arbitrary real-valued continuous functions defined on T , such that $f(t) \leq g(t)$, $t \in T$, $f(0) = y_0 = g(0)$. Finally, starting from $y(t)$, a Wiener process $x(t)$ can be constructed, with respect to which $y(t)$ is given as the solution of (*).

R. Theodorescu.

Maruyama, Gisirō: Continuous Markov processes and stochastic equations.

Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 4, 48—90 (1955).

Proofs of the results announced in the paper reviewed above.

R. Theodorescu.

Hammersley, J. M.: Markovian walks on crystals. Compositio math. 11, 171—186 (1953).

Es sei gegeben eine Markoffsche Kette N -ter Ordnung, mit einer endlichen Anzahl von Zuständen, die mit S_0, S_1, \dots, S_{t-1} bezeichnet werden mögen. Die Anzahlen der Aufenthalte in den einzelnen Zuständen in ν konsekutiven Schritten seien mit v_0, v_1, \dots, v_{t-1} bezeichnet. Verf. zeigt, daß der Zufallsvektor $(v_0, v_1, \dots, v_{t-1})$ für $\nu \rightarrow \infty$ eine asymptotisch normale Verteilung bzw. eine Mischung von normalen Verteilungen besitzt. Die Untersuchung der Markoffschen Kette N -ter Ordnung wird auf diejenige der Markoffschen Kette erster Ordnung zurückgeführt, deren Zustände $\Xi_0, \Xi_1, \dots, \Xi_{t^N-1}$ sind. Das System von Zuständen $\{S_{j_1}, S_{j_2}, \dots, S_{j_N}\}$ wird mit dem Zustand $\Xi_{j_1 + j_2 t + \dots + j_N t^{N-1}}$ identifiziert und die Methode der charakteristischen Funktion angewandt. Die Resultate werden auf die Diffusion von Elektronen auf einem Kristallgitter angewendet.

L. Takács.

Lévy, M. Paul: Loi faible et loi forte des grands nombres. Bull. Sci. math., II. Sér. 77, 9—40 (1953).

Verf. gibt zuerst eine sehr klar gefaßte und die wesentlichen Ideen stark betonende Zusammenfassung der von W. Feller (dies. Zbl. 12, 361) und ihm selbst (siehe u. a. dies. Zbl. 13, 28) stammende Bedingungen, unter welchen die Verteilung der Partialsummen einer Folge von unabhängigen Zufallsveränderlichen gegen die normale Verteilung streben. Es wird ferner folgendes Problem untersucht: Es sei $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ eine Folge von unabhängigen Zufallsveränderlichen, welche alle den Medianwert 0 besitzen. Es sei $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, und $M_n = \max_{1 \leq \nu \leq n} |X_\nu|$

gesetzt. Es bezeichne m_n den Medianwert von S_n . Es sei a_n eine monoton gegen $+\infty$ strebende Zahlenfolge. Es wird gezeigt (Sätze 1. und 2.), daß die Konvergenz gegen 0 nach Wahrscheinlichkeit (bzw. fast überall) von M_n/a_n eine notwendige Bedingung der Konvergenz gegen 0 nach Wahrscheinlichkeit (bzw. fast überall) von $(S_n - m_n)/a_n$ ist; es wird ferner untersucht, unter welchen zusätzlichen Annahmen diese Bedingungen auch hinreichend sind (Sätze 4. und 7.). Die bewiesenen neuen Sätze verallgemeinern viele ältere Resultate. Die Arbeit wurde als Anhang in der neuen Ausgabe des Buches „Théorie de l'addition des variables aléatoires“ (vgl. dies. Zbl. 56, 359) des Verf. aufgenommen.

A. Rényi.

David, F. N. and N. L. Johnson: Reciprocal Bernoulli and Poisson variables. Anais Fac. Ci. Porto 37, 200—203 (1953).

A stochastic variable x is called a reciprocal Bernoulli (Poisson) variable when $1/x$ is distributed according to the Bernoulli (Poisson) law. The author gives approximations of the central moments of x in the mentioned two cases. *H. Bergström.*

Woodbury, Max A.: Linear-convex games. J. Soc. industr. appl. Math. **1**, 137—142 (1953).

Let $\Phi(x, y)$ be the pay-off function of a game when the players use the strategies x and y respectively. The author shows that a solution (i. e. a pair of best strategies) of the game with $\Phi(x, y) = \sum_i \sum_j x_i b_{ij} y_j$ is also a solution for the "linear convex game" with $\Phi(x, y) = \sum_i x_i f(\sum_j b_{ij} y_j)$, where f is monotone, non-decreasing and convex; this holds also for the "concave linear game" with $\Phi(x, y) = \sum_j y_j g(\sum_i x_i b_{ij})$ where g is monotone non-decreasing and concave. — An application makes use of $f(u) = \exp(u)$.
S. Vajda.

Statistik:

Whittle, P.: The analysis of multiple stationary time series. J. Roy. statist. Soc., Ser. B **15**, 125—139 (1953).

Verf. untersucht Erweiterungen seiner für einfache Zeitreihen gefundenen Ergebnisse (dies. Zbl. **45**, 413) auf multiple Zeitreihen. Nach der Ableitung der Momente von linearen Funktionen der Auto- und Kreuzkorrelationen werden Schätzgleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate für die Parameter der Spektralfunktion von multiplen rein nichtdeterministischen Zeitreihen abgeleitet. Die asymptotische Kovarianzmatrix der geschätzten Parameter wird bestimmt und ein asymptotisch χ^2 -verteiltes Prüfmaß für einen Anpassungstest gegeben, der anschließend auf ein Sonnenfleckeneispiel angewendet wird. Bei den Ableitungen wurde im allgemeinen vorausgesetzt, daß der multiple Prozeß in ein autoregressives Schema entwickelt werden kann.
E. Walter.

Whittle, P.: Estimation and information in stationary time series. Ark. Mat. **2**, 423—434 (1953).

Zu N gegebenen äquidistanten Beobachtungswerten x_1, \dots, x_N einer Realisation eines stationären Gaußschen Prozesses werden für die Parameter $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ der Spektralfunktion $A(z)$ und für die Störungsvarianz $A = \sigma^2(\varepsilon)$ des Prozesses Maximum-Likelihood-Schätzwerte abgeleitet. Dabei wird vorausgesetzt, daß $A(z)$ und $(A(z))^{-1}$ auf dem Einheitskreis existieren. Es wird gezeigt, daß die Schätzwerte konsistent sind und daß sich die charakteristischen Funktionen der Schätzwerte als charakteristische Funktionen von Schätzwerten darstellen lassen, denen N unabhängige Beobachtungen zugrunde liegen. Aus dieser Zurückführung auf unabhängige Beobachtungen ergibt sich, daß die Maximum-Likelihood-Schätzwerte asymptotisch kleinstmögliche Varianz haben (dies wird auch direkt abgeleitet), daß die Informationsmatrix asymptotisch gleich der Inversen der Kovarianzmatrix der Schätzwerte ist und daß der Schätzwert von A mit den Schätzwerten $\hat{\theta}_i$ der Parameter unkorreliert ist. Verallgemeinerungen und Verfahren zur Gewinnung der Schätzwerte werden behandelt. Für die Konsistenz ist es z. B. nicht erforderlich, daß der Prozeß Gaußisch ist.
E. Walter.

Kano, Seigo: On the filter problem of a stationary stochastic process. Bull. math. Statist. **5**, Nr. 3—4, 47—51 (1953).

Bei gegebenen stochastischen Prozessen $f(t)$ und $g(t)$ besteht das Filterproblem (N. Wiener, dies. Zbl. **36**, 97) in der Bestimmung eines Operators, der, auf $f(t) + g(t)$ angewandt, $f(t + \alpha)$ am besten schätzt. Verf. betrachtet drei stationäre stochastische Prozesse $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$, von denen $x(t)$ und $y(t)$ stationär korreliert sind, $z(t)$ aber von $x(t)$ und $y(t)$ unabhängig ist. Er bestimmt einen entsprechenden Operator, der, auf $y(t) + z(t)$ angewandt, für $x(t + \alpha)$ einen Schätzwert mit minimaler Varianz liefert.
E. Walter.

Grenander, Ulf and Murray Rosenblatt: Statistical spectral analysis of time series arising from stationary stochastic processes. Ann. math. Statistics **24**, 537—558 (1953).

Let us be given a real discrete parameter stochastic process $\{y_t\}$ ($t = \dots, -1, 0, 1, \dots$) stationary in a wider sense. It is supposed that the spectral distribution function $F(\lambda)$ ($-\pi \leq \lambda \leq \pi$) is absolutely continuous and denote by $f(\lambda)$ the spectral density

function. The authors deal with the estimation of $F(\lambda)$ by the aid of the observed values of the periodogram $I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{v=1}^N y_v e^{-i v \lambda} \right|^2$ and they prove among

others the following results: 1. If $\Phi_N = \int_{-\pi}^{\pi} I_N(l) \varphi(l) dl$ and $\Phi = \int_{-\pi}^{\pi} f(l) \varphi(l) dl$ where $\varphi(l)$ is bounded, symmetric about zero and has at most a finite number of discontinuities, then $\lim_{N \rightarrow \infty} E\{\Phi_N\} = \Phi$ if $f(\lambda)$ is continuous, and $E\{\Phi_N\} =$

$\Phi + O(\log N/N)$ if $f(\lambda)$ has a bounded derivative. 2. Define $y_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \xi_{t-n}$ where $\{\xi_t\}$ are independent identically distributed random variables with $E\{\xi_t\} = 0$, $E\{\xi_t^2\} = 1$, $E\{\xi_t^4\} = 3 + e$ and $E\{\xi_t^n\} < \infty$. In this case $a_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \sqrt{f(\lambda)} d\lambda$.

Put $F_N^*(\lambda) = \int_0^{\lambda} I_N(l) dl$ and $G(\lambda) = \int_0^{\lambda} f^2(l) dl$. If $f(\lambda)$ is absolutely continuous and $a_v = O(v^\beta)$, $\beta < -\frac{3}{2}$ then

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \max_{0 \leq \lambda \leq \pi} \sqrt{N} |F_N^*(\lambda) - F(\lambda)| \leq \alpha \right\} = P \left\{ \max_{0 \leq \lambda \leq \pi} |\eta(\lambda)| \leq \alpha \right\}$$

where $\{\eta(\lambda)\}$ is a Gaussian process with $E\{\eta(\lambda)\} = 0$ and $E\{\eta(\lambda) \eta(\mu)\} = e F(\lambda) F(\mu) + 2\pi G(\min(\lambda, \mu))$. 3. If $a_v = O(v^\beta)$, $\beta < -1$, the statistic $G^*(\pi) = \frac{1}{4\pi N^2} \left[C_0^2 + 2 \sum_{v=1}^{[KN^\alpha]} C_v^2 \right]$, where $C_v = \sum_{n=1}^{N-v} y_n y_{n+v}$, $0 < \alpha < 1$, $K > 0$, is a consistent estimate of $G(\pi)$. 4. If $\{y_t\}$ is a Gaussian process, $f''(\lambda)$ exists and is integrable then

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ |F_N^*(\lambda) - F(\lambda)| < \alpha \sqrt{\frac{2\pi G^*(\pi)}{N}} \right\} \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k [\Phi((2k+1)\alpha) - \Phi((2k-1)\alpha)], \end{aligned}$$

where $\Phi(x)$ is the normal distribution function. By this theorem one can construct a confidence interval for $F(\lambda)$. Further the authors deal with the relations of estimates based on two independent time series, with the estimates based on truncated statistics and with modified estimates by weight functions. *L. Takács.*

Grenander, Ulf and Murray Rosenblatt: Comments on statistical spectral analysis. Skand. Aktuarietidskr. 53, 182—202 (1953).

The authors give the interpretations and heuristic proofs of the main results of the preceding review and give some statistical applications. *L. Takács.*

Kudô, Akio: Note on the estimation of the mean value of the stochastic process. Bull. math. Statist. 5, Nr. 3—4, 53—58 (1953).

Gegeben sei ein stetiger stochastischer Prozeß $x(t)$ ($0 \leq t \leq T$) mit unbekanntem konstantem Mittelwert $m = E\{x(t)\}$. Es werden die Varianzen der folgenden drei auf endlich vielen Beobachtungen $x(t_k)$ beruhenden erwartungstreuen Schätzwerte von m , die sich durch die Art der Zufallsauswahl der Beobachtungszeitpunkte t_k bzw. ζ_k unterscheiden, miteinander verglichen.

$$\begin{aligned} m^* &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(t_k) & t_k \text{ gleichverteilt über } (0, T); \\ &= \frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^{M-1} x(t_k) & \begin{cases} t_k - t_{k-1} \text{ exponentialverteilt} \\ (k=1, \dots, M, t_{M-1} \leq T \leq t_M, t_0=0); \end{cases} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=1}^M (t_k - t_{k-1}) x(\zeta_k) & \begin{cases} t_k - t_{k-1} \text{ wie oben, aber } t_m = T, \\ \zeta_k \text{ gleichverteilt über } (t_{k-1}, t_k). \end{cases} \end{aligned}$$

E. Walter.

Matschinski, Matthias: Sur les compositions applicables à l'estimation de la probabilité d'une hypothèse. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 1849—1851 (1953).

Mohnsame, Mathias: Processus stochastiques et interprétation géométrique des équations de M. Matschinski. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 1851—1853 (1953).

Freire, Rémy: L'estimation des paramètres des fonctions d'Engel. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **2**, Nr. 3, 19—26 (1953).

Verf. macht für die Engelsche Funktion zwischen dem Gesamteinkommen x eines Konsumenten und den Ausgaben y für ein bestimmtes Gut den Ansatz $y = \alpha + \beta \cdot f(x, k_1, \dots, k_m)$, wo $\alpha, \beta, k_1, \dots, k_m$ unbekannte Parameter sind. Er behandelt das Problem der Schätzung dieser Parameter mittels der Maximum-Likelihood-Methode unter der Voraussetzung, daß die Abweichungen zwischen den Werten der Funktion in jedem Punkt und den Werten, die durch die Beobachtung erhalten werden, normal und unabhängig verteilt sind. Das vorgeschlagene Berechnungsverfahren geht auf eine Methode von Fisher zurück, die in einem ähnlichen Falle von Stevens [Biometrics **7**, 247—267 (1951)] angewandt wurde. E. Burger.

Mérie, Jean: Test progressif de l'hypothèse que le paramètre d'une loi binomiale est voisin d'une valeur donnée. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1390—1392 (1953).

A. Wald und M. Sobel (dies. Zbl. **31**, 230) hatten den Sequentialtest bei Normalverteilung auf die Prüfung von 3 Hypothesen erweitert. Verf. bringt eine entsprechende Prüfung der Hypothesen $H = (p_0 \leq p \leq p_1)$, $H_0 = (p \leq \omega_i \leq p_0)$ und $H_1 = (p \geq \bar{\omega}_1 \geq p_1)$ für den Parameter p einer Binomialverteilung. Als Prüfmaße werden die Wahrscheinlichkeitsverhältnisse der Hypothesen H zu H_0 und H zu H_1 verwendet und die Beobachtungen solange fortgesetzt, bis sich beide Quotienten außerhalb der Grenzen A und B befinden, die in der üblichen Weise aus den vorgegebenen Fehlerwahrscheinlichkeiten für die einzelnen Tests errechnet wurden. E. Walter.

Raj, Des: On estimating the parameters of binormal populations from linearly truncated samples. Ganita **4**, 147—154 (1953).

Für die Schätzung der Parameter einer Binormalverteilung aus einer linear in y gestützten ($y > k$) n_0 -gliedrigen Stichprobe bestimmt Verf. Schätzer mittels der in diesem Falle zum gleichen Resultat führenden Maximum-Likelihood- und Momenten-Methode, und zwar unter Annahme unbekannter bzw. bekannter Anzahl der durch die Stützung ausgeschalteten Messungen. Hierbei treten die vom Verf. bereits in ähnlichem Zusammenhang (D. Raj, dies. Zbl. **48**, 120) tabulierten Funktionen φ_1, φ_2 auf. In beiden Fällen wird ferner mittels der zweiten Ableitungen der logarithmierten Likelihood-Funktion die Inverse der Dispersionsmatrix der gefundenen Schätzer bestimmt. M. P. Geppert.

Abelson, Robert P.: A note on the Neyman-Johnson technique. Psychometrika **18**, 213—218 (1953).

The author is interested in tests of significance of the difference of the means of two variables when they are correlated with other variables. In such cases one uses the technique of the analysis of covariance. Another approach is given by Neyman and Johnson (this Zbl. **14**, 321). The author proposes some procedure which utilizes the advantages of both techniques. By the way the author generalizes the Neyman-Johnson procedure. W. Sadowski.

Fraser, D. A. S.: The Behrens-Fisher problem for regression coefficients. Ann. math. Statistics **24**, 390—402 (1953).

Der von E. Barankin (dies. Zbl. **39**, 147) abgeleitete Test für den Vergleich von zwei Regressionskoeffizienten bei unbekannten und nicht gleichen Varianzen wird verallgemeinert. Es sei U und U^* normalverteilt mit den Mittelwerten $\sum_{r=1}^p \beta_r x_r + \sum_{s=1}^q T_s y_s$ bzw. $\sum_{r=1}^p \beta_r^* x_r^* + \sum_{s=1}^q T_s^* y_s^*$ und den Varianzen σ^2 bzw. σ^{*2} , dann soll die Hypothese $H_q = (T_s = T_s^*, s = 1, \dots, q)$ geprüft werden, wenn von U, x_r, y_s bzw. U^*, x_r^*, y_s^* jeweils eine Stichprobe mit m bzw. n Werten vorliegt. Für den Fall $q = 1$ wird eine Klasse C_α von ähnlichen Bereichen und ein in C_α schärfster Test angegeben, der mit dem von Barankin (l. c.) vorgeschlagenen Test für $p = 1$ übereinstimmt. Für $q > 1$ werden verschiedene Möglichkeiten diskutiert,

die im wesentlichen auf Zusammenfassungen der q Ergebnisse beruhen, die man erhält, wenn die q Regressionskoeffizienten einzeln geprüft werden. *E. Walter.*

Maritz, J. S.: Estimation of the correlation coefficient in the case of a bivariate normal population when one of the variables is dichotomized. *Psychometrika* 18, 97—110 (1953).

Für den Korrelationskoeffizienten ρ einer zweivariablen Normalverteilung wird ein Schätzwert G für den Fall, daß die eine Variable y an der Stelle β zweigeteilt (dichotomisiert), die andere x normiert und in k Klassen eingeteilt ist, abgeleitet. Der Schätzwert beruht auf einer Probitanalyse der relativen Häufigkeiten in den einzelnen Klassen. Er ergibt sich aus dem Maximum-Likelihood-Schätzwert des Regressionskoeffizienten, der iterativ aus einer graphischen Anfangslösung berechnet wird. Die Varianz von G wird für verschiedene ρ und Teilungspunkte β berechnet und ist an diesen Stellen kleiner als die Varianz des Zweireihenkorrelationskoeffizienten von Pearson. Auch bleibt G , wenn die Verteilung von y abgeschnitten ist, konsistent. *E. Walter.*

Sargan, J. D.: An approximate treatment of the properties of the correlogram and periodogram. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* 15, 140—152 (1953).

Die wichtigsten Eigenschaften des Korrelogramms und des Periodogramms von autoregressiven, Moving-Average-, reinen Zufalls- u. a. Zeitreihen x_1, \dots, x_n werden hergeleitet, wobei nur die Glieder der höchsten Ordnung in n berücksichtigt werden. In ähnlicher Weise wird Fishers Periodogrammtest auf die Prüfung eines Modells mit geschätzten Parametern erweitert und mit anderen Tests am Beispiel der Beveridge Weizenpreis-Indizes verglichen. *E. Walter.*

Guttman, Louis: Reliability formulas that do not assume experimental independence. *Psychometrika* 18, 225—239 (1953).

Guttman, Louis: Reliability formulas for noncompleted or speeded tests. *Psychometrika* 20, 113—124 (1955).

The various reliability coefficients popularly in use either implicitly or explicitly assume that the scores being summed are experimentally independent. For non-completed tests such an assumption of independence is incorrect. The kind of reliability coefficient the author has implied here has been called the retest coefficient, referring to repeated experiments on the same test. — Let x_{ijk} be the score of the i -th respondent on the j -th part score on the k -th trial. The population of respondents and the (hypothetical) universe of experiments will be assumed to be indefinitely large, so the subscripts i and k are unbounded. The range for j is $j = 1, 2, \dots, n$. — Let t_{ik} be the total score on the test for person i on trial k and denote the expected total score for person i by T_i then $T_i = E_k t_{ik}$. Put $\tau = E_i T_i$ then the reliability coefficient is defined by (1) $\rho_i^2 = 1 - \epsilon^2 \sigma_i^2$ where σ_i^2 is the general variance for the total test scores: $\sigma_i^2 = E_i E_k (t_{ik} - \tau)^2$ and ϵ^2 is the mean error variance within population $\epsilon^2 = E_i E_k (t_{ik} - T_i)^2$. — In the first paper ϵ^2 and ρ^2 are considered without necessarily assuming experimental independence of the parts, more general formulae than (1) and three lower bounds for the latter are derived. The second paper deals with measures of the reliability of tests given to a set of subjects, containing m items where it may happen that $m - n$ of the items are either answered correctly by all the subjects or are attempted by none. Then only the remaining n items contribute to the variance of test scores. The basic assumption is that if person i attempts item j then his score on any later item g ($g > j$) will be experimentally independent of his score on this attempted item j . For an infinite population of subjects and infinite repetitions of the test, using results of the first paper, new formulae are developed to give two lower bounds to the reliability of such tests and for the case that the score both for an incorrectly answered item and for an item not attempted is zero. *M. Ziermann.*

Stange, Kurt: Über die Beurteilung des Gütegrades von Mischungen bei beliebigen Verteilungsgesetzen für die Korngewichte der einzelnen Mischungskomponenten. *Abh. Braunschweig. wiss. Ges.* 5, 164—186 (1953).

Verf. geht aus von der Bildung einer Zufallsmischung aus zwei körnigen Materialien und setzt voraus, daß für jede derselben die Summenfunktion $F(\gamma)$ der relativen Teilchenzahl über dem Teilchengebiet γ bekannt ist. Er stellt sich zunächst vor, daß sich die beiden Stoffe in verschiedenen Behältern befinden, und greift gemäß einem Zufallsvorgang (Würfelspiel, Roulette oder dgl.) jeweils aus einem der beiden Behälter blindlings ein Teilchen heraus und tut es in einen anfangs leeren Behälter. Diese Vorstellung verallgemeinert er in der Richtung, daß er aus den beiden Behältern Stichproben vom Umfang n entnimmt und sie in dem anfangs leeren Behälter zu einer Mischung vereinigt. Die statistische Aufgabe geht dann dahin, die Gewichtsanteile X und Y der Materialien P und Q in der Mischung zu bestimmen. Die Aufgabe in voller Allgemeinheit zu lösen, ist zwar nicht unmöglich, aber die Lösung wäre so unhandlich und undurchsichtig, daß sie praktisch kaum verwendbar wäre. Verf. begnügt sich daher mit einer für praktische Zwecke genügenden Lösung auf Grund der Annahme, daß die Teilchenzahl n der Probe noch „genügend groß“ ist. Auf Grund der Lösung kann man eine Mischung grundsätzlich nach einem vom Verf. entwickelten Verfahren auf ihre Gleichmäßigkeit prüfen. Verf. erweitert das Verfahren auch auf Mischungen aus mehreren Stoffen.

P. Lorenz.

Williams, E. J.: A method of analysis for double classifications. *Austral. J. appl. Sci.* **4**, 357—370 (1953).

Wenn aus einer Matrix von Versuchsdaten zwei unabhängige, additive Faktoren erschlossen werden sollen, welche der Veränderlichkeit in den Zeilen bzw. Spalten zugrunde liegen, bekommt man es mit umständlichen Normalgleichungen zu tun. Hier wird ausgeführt, daß man deren Auflösung wie auch die Varianzanalyse und Signifikanzprüfung oft erheblich abkürzen kann, indem man die Zeilenmittelwerte als erste Näherungen für die Werte des in den Zeilen wirksamen Faktors betrachtet. Die Güte dieser Näherung wird eingehend untersucht: sie reicht besonders bei nahezu orthogonalen Daten aus.

E. Breitenberger.

Rippe, Dayle D.: Application of a large sampling criterion to some sampling problems in factor analysis. *Psychometrika* **18**, 191—205 (1953).

The main purpose of this paper is to give a test for determining the number of significant components in factor analysis. The technique proposed by the author is connected with the Lawley test (this Zbl. **27**, 235), but in some sense is much more general. The large-sample test proposed by the author is a very suitable one for practice.

W. Sadowski.

● **Harris, T. E., R. Bellman and H. N. Shapiro:** Studies in functional equations occurring in decision processes. (The Rand Corporation Report P-382). Santa Monica, Calif.: The Rand Corporation 1953. 62 p.

Inada, Ken-iti: On a certain decision problem under some constraints. *Ann. Inst. statist. Math.* **4**, 65—82 (1953).

Verf. stellt das Problem, beim Zweipersonenspiel der Theorie der Spiele und entsprechend auch in der Theorie der Entscheidungsfunktionen Lösungen für den Fall zu suchen, daß bei m reinen Strategien des Spielers 1 die Wahrscheinlichkeiten ξ_i der gemischten Strategien $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ p Ungleichungen $g_k(\xi_1, \dots, \xi_m) \geq 0$ genügen. Einige einfache Beispiele aus beiden Gebieten, bei denen nur die Ungleichung $\xi_1 \geq \alpha$ benutzt wurde, werden ausführlich diskutiert. Bei ihnen mußte nach der Größe von α eine Fallunterscheidung gemacht werden.

E. Walter.

Konijn, H. S.: A remark on the characterization of minimax procedures. *Ann. Inst. statist. Math.* **4**, 103—105 (1953).

Es werden zwei Sätze von A. Wald (dies. Zbl. **40**, 364) erweitert. — 1. Wenn δ_0 eine Minimaxlösung ist, dann gibt es unter den Voraussetzungen 3.1—3.6 von Wald eine Folge $\{\xi_i\}$ von a priori Verteilungen über der Menge Ω der zugelassenen Verteilungen F , so daß δ_0 eine Bayessche Lösung von $\{\xi_i\}$ darstellt und für alle $\theta > 0$ $\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i(\omega_\theta^0) = 0$ mit $\omega_\theta^0 = \{F \in \Omega: \sup_{F'} r(F', \delta) - r(F, \delta) > \theta\}$.

2. Wenn δ_0 für eine Folge $\{\xi_i\}$ von a priori Verteilungen über Ω eine Bayessche Lösung ist und $\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i(\omega_\theta^0) = 0$, dann ist δ_0 eine Minimaxlösung.

E. Walter.

Konijn, H. S.: A further remark on the characterization of minimax procedures. *Ann. Inst. statist. Math.* 6, 123 (1954).
Addition to the preceding paper.

Konijn, H. S.: On certain classes of statistical decision procedures. *Ann. math. Statistics* 24, 440—448 (1953).

A. Wald hat 1951 (dies. Zbl. 40, 364) Bedingungen angegeben, denen eine Menge von Entscheidungsfunktionen genügen muß, damit Bayessche und Minimaxlösungen existieren. Verf. zeigt nun, daß man aus einer Menge, die diesen Bedingungen genügt, folgende Untermengen fortlassen kann, ohne daß die dadurch entstehende Restmenge diese Eigenschaft verliert: Die Menge der Entscheidungsfunktionen, bei denen 1. die Beobachtungskosten oder die durch eine falsche Entscheidung entstehenden Verluste für irgendeine zulässige Verteilung F vorgegebene Größen mit größeren Wahrscheinlichkeiten als vorgegeben überschreiten, 2. der Erwartungswert der Beobachtungskosten oder des Verlustes bei irgendeinem F größer als vorgegeben ist, 3. die Risikofunktion bezüglich F unbegrenzt ist oder 4. die Anzahl der Beobachtungsentnahmen mit positiver Wahrscheinlichkeit unbegrenzt ist. *E. Walter.*

Cohen, E. Richard: The basis for the criterion of least squares. *Reviews modern Phys.* 25, 709—713 (1953).

Verf. rechtfertigt die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate für den Fall, daß nicht Gaußverteilung vorliegt, durch einen Beweis, nach dem bei endlichen zweiten Momenten die Methode Schätzwerte mit größtem Gewicht (kleinster Varianz) liefert. Eine Darstellung früherer Beweise findet sich bei R. L. Plackett (dies. Zbl. 41, 468). *E. Walter.*

Williams, E. J. and N. H. Kloot: Interpolation in a series of correlated observations. *Austral. J. appl. Sci.* 4, 1—17 (1953).

An den äquidistanten Argumentstellen $1, \dots, 2n + 1$ habe eine abhängige Zufallsvariable die Werte x_1, \dots, x_{2n+1} ; zwei Werte im Abstand s voneinander seien gemäß $\varrho_s = \exp(-\lambda s)$ korreliert. Nachdem eine Stichprobe die Reihe $x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}$ geliefert hat, sollen x_2, x_4, \dots, x_{2n} durch Interpolation mittels kleinster Quadrate geschätzt werden. Dazu muß man allerdings λ bereits kennen. In einem Anhang wird gezeigt, wie man λ aus der gegebenen Stichprobe grob abschätzen kann: praktisch verfährt man besser, indem man je nach Sachlage die Interpolationsformeln auf volle oder auf verschwindende Korrelation ($\lambda = 0$ oder ∞) spezialisiert. An einem Zahlenbeispiel wird auseinandergesetzt, in welchem Maße die Formeln für die Grenzfälle praktisch verwendet werden können. *E. Breitenberger.*

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Ludwig, Wilhelm: Probleme und Aufgaben der Biomathematik. *Studium generale* 6, 637—646 (1953).

Verf. schildert vom Standpunkt des Biologen aus die Möglichkeiten der mathematischen Durchdringung der Biologie. Dabei werden sowohl Fragen betrachtet, bei denen sich mathematische Modelle und Methoden bereits sehr gut bewährt haben, als auch solche, bei denen nur die Möglichkeit einer mathematischen Behandlung in Erwägung gezogen wird. U. a. werden erwähnt: Die Untersuchungen von Volterra und Lotka zur Stabilität von Lebensgemeinschaften mittels Integrodifferentialgleichungen, die Methoden der mathematischen Statistik — insbesondere die klassischen Testverfahren, die Prinzipien der Versuchsplanung, Sequenz-, Diskriminanz-, Faktorenanalyse, — „Anwendung mathematischer Methoden auf physikalische Vorgänge am und im Lebenden“, „Optimumprobleme“, z. B. Untersuchungen darüber, ob die Verzerrung beim binokularen Raumsehen minimal ist, Probleme der Kybernetik usw. Besonders großen Wert legt Verf. darauf, zu betonen, wie biologische Fragestellungen die Weiterentwicklung mathematischer Theorien befruchtet haben, z. B. Probleme der Pflanzenzüchtung die Theorie der lateinischen Quadrate. Das Fazit ist: „Allmählich wird die Mathematik ebenso zum Rüstzeug des Biologen gehören müssen wie heute die Chemie. Zusammenarbeit zwischen Biologen und Mathematikern wird notwendig sein.“ *O. Ludwig.*

Kendall, David G.: Stochastic processes and the growth of bacterial colonies. Symposia Soc. experimental Biology 7, 55—65 (1953).

This is an expository paper illustrating stochastic processes on the growth of a bacterial colony and on the bacterial mutation. Several methods, deterministic as well as stochastic, are referred to historically from the view-point of contrast.

Y. Komatu.

Darwin, J. H.: Population differences between species growing according to simple birth and death processes. Biometrika 40, 370—382 (1953).

The growth of a single species is discussed for some simple birth and death processes. In the latter part, a stochastic model is considered, as a possible source of heterogeneity, for the evolution of a number of different species. Y. Komatu.

Hammersley, J. M.: Capture-recapture analysis. Biometrika 40, 265—278 (1953).

A stochastic method depending on the maximum likelihood is described for the analysis of capture-recapture data. It is illustrated by a laborious numerical computation for estimating the death-rate of Alpine Swifts (*Apus melba*) in the wild state.

Y. Komatu.

Laurent-Duhamel, Marie-Jeanne: Étude statistique de contours craniens considérés comme courbes aléatoires. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 2, Nr. 3, 27—54 (1953).

Statistische Auswertung von 100 Kopf- und 100 Schädelkonturen, deren Gleichung in Polarkoordinatenform, $\varrho_j = f_j(\omega)$, wobei Anfangspunkt und Achse der Polarkoordinaten durch das Meßgerät bestimmt wird, nach Messung von 12 Punkten (ω, ϱ) jeder Kontur durch ihre Fourier-Entwicklung $\varrho_j = a_0 + \sum_{i=1}^{12} [a_{ij} \cos(i\omega) + b_{ij} \sin(i\omega)]$ approximiert wird. Mit Hilfe des

χ^2 -Tests sowie des Normalitäts-Tests von Geary und Pearson wird gezeigt, daß die Verteilung der 24 Fourier-Koeffizienten in beiden Klassen von der Normalverteilung nicht wesentlich abweicht. Die gegenseitige Abhängigkeit der 24 Fourier-Koeffizienten untersucht Verf. für 11 Koeffizientenpaare $(a_0 \text{ und } a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3; a_1 \text{ und } a_2, b_1; b_1 \text{ und } b_2, b_3)$ durch Berechnung der Korrelationskoeffizienten und -Verhältnisse sowie des Diagonal-Index von Fréchet, des Konnektionsindex von Gini und der Maße von Jordan und Geiringer; es ergibt sich kein Anhaltspunkt für signifikante Abhängigkeiten. Durch arithmetische Mittelung der ϱ_j für festes ω definiert Verf.

die mittlere Kontur $\bar{\varrho}(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varrho_j(\omega)$, deren Fourierkoeffizienten \bar{a}_i, \bar{b}_i die arithmetischen Mittel der entsprechenden a_{ij} bzw. b_{ij} sind. Analoges gilt für die Median-Kontur und die Quartil-Konturen. Als Abweichungsmaß der Kontur j von der mittleren wird

$$X_j^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varrho_j - \bar{\varrho})^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \left(S_j + \bar{S} - \int_0^{2\pi} \varrho_j \bar{\varrho} d\omega \right),$$

als Gesamtstreuungsmaß $\bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_j X_j^2 = \frac{1}{\pi} (\bar{S} - \bar{S})$ verwendet, wo S_j, \bar{S} die von der Kontur bzw. von der mittleren Kontur eingeschlossene Fläche und \bar{S} den Mittelwert der S_j bedeutet. Sowohl X_j als auch $\log X_j$ erweisen sich als annähernd normal verteilt. M. P. Geppert.

Kao, Richard C. W.: Note on Miller's „Finite Markov processes in psychology“. Psychometrika 18, 241—243 (1953).

Hier liegen einige kritische Bemerkungen vor betreffend die Methode, die G. Miller (dies. Zbl. 49, 378) für die Bewertung der Matrix T der Übergangswahrscheinlichkeiten eines Erlernungsprozesses angewendet hat. Es wird hierbei bemerkt, daß eine bestimmte Matrix, die bei der Bewertung von T eine maßgebende Bedeutung hat, nicht immer eine Inverse besitzt. Weiter wird auch bemerkt, daß, wenn die Matrix M der beobachteten Frequenzen eine Quadratmatrix ist, — was wohl ohne besondere praktische Bedeutung sein mag — die Methode uns eine Korrektionsmatrix gleich 0 gibt, was auch ohne weitere Rechnungen ersichtlich ist. Schließlich werden Bemerkungen von allgemeinem Interesse über die Bewertung von T durch die Methode der kleinsten Quadrate gemacht. O. Onicescu.

Tarabini, Vera: *Sulle fluttuazioni biologiche.* Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 422—428 (1953).

Das von V. Volterra (*Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, dies. Zbl. 2, 41) zur deterministischen Beschreibung zweier Arten, von denen eine (N_2) die andere (N_1) verzehrt, untersuchte Differentialgleichungssystem erweitert Verf. durch Hinzufügung zweier Terme mit $\delta_1 > 0$, $\lambda_1 > 0$ zu

$$dN_1/dt = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 + \delta_1 N_1 - \lambda_1 N_1^3), \quad dN_2/dt = N_2(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1).$$

Die Untersuchung der Gleichgewichtslösungen $k_1 = \varepsilon_2/\gamma_2$, $k_2 = \varepsilon_1/\gamma_1 + \delta_1 \varepsilon_2/(\gamma_1 \gamma_2) - \lambda_1 \varepsilon_2^3/(\gamma_1 \gamma_2^3)$ dieses Systems ergibt durch Anwendung einer Approximationsmethode der nicht-linearen Mechanik: Je nachdem $\delta_1 k_1 - 3 \lambda_1 k_1^3 < 0$ oder > 0 , streben N_1, N_2 für $t \rightarrow \infty$ gegen die Konstanten k_1, k_2 oder gegen periodische Funktionen $k_1(1 + v_1)$, $k_2(1 + v_2)$ mit $v_1 = a \sqrt{\varepsilon_1 \cos(t \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \Phi})}$, $v_2 = a \sqrt{\varepsilon_2 \sin(t \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \Phi})}$, $a^2 = (\delta_1 - 3 \lambda_1 k_1^2)/(3 \lambda_1 \varepsilon_1 k_1^2)$. M. P. Geppert.

• **Hooker, P. F. and L. H. Longley-Cook:** *Life and other contingencies.* Vol. I. Cambridge: At the University Press 1953. VIII, 312 p. 22 s. 6 d.

Einer Würdigung des Buches muß man die grundsätzlichen Unterschiede voranstellen, welche in der Ausbildung der Versicherungsmathematiker in England und in den meisten kontinentalen Ländern bestehen. Auf dem Kontinent liegt die Heranbildung der Versicherungsmathematiker überwiegend in der Hand der Universitäten und Technischen Hochschulen, während in England das „Institute of Actuaries“ (London) und die „Faculty of Actuaries“ (Edinburgh) ausschließlich für die Berufsausbildung sorgen; beide Institutionen sind völlig unabhängig von den Universitäten und geben auf Grund von sehr strengen Prüfungen eigene Diplome ab. Das Hauptziel des vorliegenden Buches besteht in der Vorbereitung auf die verschiedenen Prüfungen, nimmt somit stark Rücksicht auf den geforderten Prüfungsstoff. Die Verf. beschreiben im vorliegenden ersten Band die mehr elementaren Teile der Versicherungsmathematik, wie Sterbetafel, Prämien und Deckungskapitalberechnung — einzeln und in Gruppen. Die Darstellung ist vorbildlich klar. Für den kontinentalen Versicherungsmathematiker ist das Werk auch deshalb von Bedeutung, weil neben den üblichen Versicherungsformen Sonderfälle beschrieben werden, die in andern Lehrbüchern nur am Rande gestreift werden. Zahlreiche numerische Beispiele erleichtern vor allem dem Anfänger das Verständnis. E. Zwinggi.

• **Donald, D. W. A.:** *Compound interest and annuities-certain.* Cambridge: At the University Press 1953. VIII, 300 p. 20 s.

Verf. gibt im vorliegenden Buch eine auf die Praxis gerichtete Darstellung der Zinseszins- und Rentenrechnung und der damit zusammenhängenden Probleme des Effektivengeschäfts. Nach Einführung der Grundbegriffe und der wichtigsten Formeln bei kontinuierlicher und diskontinuierlicher Verzinsung (Kap. 1—3) werden die Anleihen (Kap. 4—5) und die Sparversicherung (Kap. 6) behandelt. Zwei weitere Kapitel (7 und 8) sind der Kurs- und Renditeberechnung von Effekten, vor allem Obligationen, gewidmet. Dabei geht er insbesondere auf die Bedeutung der Formel von Makeham ein. Je ein Kapitel (9—11) über Tilgungsdarlehen, den Einfluß der Einkommensteuer auf die Rendite der einzelnen Arten von Effekten und die Zinseszinsrechnung bei variablem Zins schließen sich an. Abschließend geht Verf. in Kapitel 12 auf die Konstruktion von Hilfstafeln zur Zinseszinsrechnung ein. — Jedem der Kapitel 1—11 sind zahlreiche sorgfältig ausgewählte Zahlen- und Übungsbeispiele angefügt. — Anm. d. Ref.: Auf die brauchbaren nomographischen Methoden zur Lösung von Problemen der Zinseszinsrechnung geht Verf. leider nicht ein. G. Friede.

Andreoli, G.: *Saggio matematico di leggi evolutive di collettività (non determinismo, causalismo, finalismo).* Ricerca. Rivista Mat. pur. appl. 2, Nr. 3—4, 3—9 (1951); 3, Nr. 1, 3—7, Nr. 2, 3—11, Nr. 3—4, 17—24 (1952); 4, Nr. 1—2, 11—39 (1953).

The author discusses in an elementary manner the development of a population which falls into different classes. It is assumed that the changes of the population are due to one of the following causes: (a) Transition of elements from one class to another (b) multiplication of elements (c) combination of causes (a) and (b). No use is made of the theory of Markoff chains or of the theory of branching processes. E. Lukacs (M. R. 15, 42).

• **Tustin, Arnold:** *The mechanism of economic systems.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1953. XII, 161 p. \$ 5.00.

Malécot, G.: Sur l'amortissement des fluctuations économiques. (Examen critique de la théorie de Tinbergen). Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 2, Nr. 3, 55—65 (1953).

Bericht über das von Tinbergen (dies. Zbl. 21, 344; 45, 232) entwickelte ökonometrische Modell. *E. Burger.*

Nataf, André: Sur des questions d'agrégation en économétrie. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 2, Nr. 4, 1—61 (1953).

Seien $F_\alpha(x_{1\alpha}, \dots, x_{m\alpha}; n_{1\alpha}, \dots, n_{r\alpha}; z_{1\alpha}, \dots, z_{s\alpha}) = 0$ ($\alpha = 1, \dots, A$) die Produktionsfunktionen von A Betrieben, wobei $x_{1\alpha}, \dots, x_{m\alpha}$ die jeweiligen Mengen von m Gütern, $n_{1\alpha}, \dots, n_{r\alpha}$ die von r Arten Arbeit, $z_{1\alpha}, \dots, z_{s\alpha}$ die von s Arten Kapital bedeuten. Verf. zeigt zunächst, daß für die Existenz dreier (hinreichend regulärer) Funktionen $X = G(x_{11}, \dots, x_{mA})$ (Güterindex), $N = H(n_{11}, \dots, n_{rA})$ (Arbeitsindex), $Z = I(z_{11}, \dots, z_{sA})$ (Kapitalindex) und einer (hinreichend regulären und nichttrivialen) Funktion $\Phi(X, N, Z)$ mit $\Phi(G, H, I) = 0$ für alle $x_{11}, \dots, \dots, z_{sA}$, die den A Produktionsgleichungen $F_\alpha = 0$ genügen (Aggregationsproblem von L. R. Klein), notwendig und hinreichend ist, daß die Produktionsfunktionen für jeden Betrieb sich als Summe dreier Funktionen schreiben lassen, die jeweils nur von den zugehörigen Gütern bzw. Arbeits- bzw. Kapitalmengen abhängen. — In der Theorie der Konsumtion untersucht Verf. die Bedingungen für die Indifferenzflächen der Individuen einer Gruppe I , damit für jeden Punkt G der mittleren Konsumtion der Gruppe I und bei jeder Verteilung der Einkommen der Mitglieder von I , welche den Punkt G für die mittlere Konsumtion liefert, dieser Punkt G als Berührungspunkt eines festen Systems von Indifferenzflächen mit der Ebene des Gesamtbudgets erhalten werden kann. Es erweist sich hierzu als notwendig und hinreichend, daß die Engelschen Kurven der verschiedenen Individuen zu gleichen Preissystemen untereinander parallele gerade Linien sind. — Die übrigen Ergebnisse der Arbeit sind nicht so abgerundet. Sie betreffen Aggregationsprobleme unter spezielleren Voraussetzungen, z. B. den Fall der Konsumtion unter der Voraussetzung gleicher Einkommen aller Individuen. *E. Burger.*

Arrow, Kenneth J.: Le rôle des valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risques. Colloques internat. Centre nat. Rech. sci. 40, 41—48 (1953).

Verf. verallgemeinert für den Fall einer reinen Tauschwirtschaft die Theorie der optimalen Verteilung der zur Verfügung stehenden Mittel auf den Fall, in dem die Zukunft ungewiß ist, aber jedes Individuum die möglichen zukünftigen Zustände mit subjektiven Wahrscheinlichkeiten belegt. Es wird sowohl der Fall betrachtet, daß die „eventuellen Anteilsrechte“ (droites éventuels) an den einzelnen Gütern für die einzelnen Zustände direkt auf dem Markt gehandelt werden, als auch der Fall eines vermittelnden Marktes von geldlichen Börsenwerten. Es werden Bedingungen angegeben, unter denen die Optimalverteilung durch einen Markt mit vollständiger Konkurrenz erreicht werden kann. *E. Burger.*

Guilbaud, G.: Sur une difficulté de la théorie du risque. Colloques internat. Centre nat. Rech. sci. 40, 19—28 (1953).

Hoffman, A., M. Mannos, D. Sokolowsky and N. Wiegmann: Computational experience in solving linear programs. J. Soc. industr. appl. Math. 1, 17—33 (1953).

After a brief description of Linear Programming, illustrated by the "caterer problem", there follows a detailed investigation of the relative merits of three computational techniques, viz. the Simplex method, the fictitious play method, and the relaxation method. They are compared by applying them to various game problems (which are equivalent to Linear Programming problems, and also to the problem of solving a set of linear inequalities). The authors conclude that, for large size problems, the Simplex Method is to be preferred, but they find also an area of usefulness for the other methods. The computations were carried out on the SEAC, an electronic computer at the National Bureau of Standards in Washington, D. C. *S. Vajda.*

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

Panvini, Jean: Alcune osservazioni sulle geometrie non archimedee. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 7, 153—159 (1953).

Let C_P be the field of functions of a real variable t , obtained from the function t by using the four rational operations and the operation $(1 + \omega^2)^{1/2}$, and ordered as

follows: $f \sim g$ if and only if there exists a t_0 such that $f(t) - g(t) = 0$ for all $t \geq t_0$. Making use of C_p , Hilbert (Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl., Leipzig 1930, p. 47) has constructed a model of a non-archimedean geometry, i. e. a geometry satisfying all Hilbert axioms for the 3-dimensional euclidean geometry except for the postulate of Archimedes. The author shows that every non-archimedean geometry may be constructed in a similar way from a non-archimedean field C , closed under the operation $(a^2 + b^2)^{1/2}$. Moreover, every such field has a subfield isomorphic to C_p ; therefore, the most general non-archimedean geometry „contains“ Hilbert's model. In the geometry constructed on C_p , a circle and a straight line, going through its interior and lying in its plane, do not necessarily meet. This remains true when C_p is replaced by a field C_p' , obtained from C_p in a similar (but not identical) way as the one used generally to define the real numbers from the rationals. C_p' is continuous in the sense of Cantor; therefore, the situation described above may arise even in geometries verifying Cantor's continuity axiom.

J. L. Tits (Math. Reviews 15, 461).

Bernays, Paul: Über die Verwendung der Polygoninhalte an Stelle eines Spiegelungsaxioms in der Axiomatik der Planimetrie. Elemente Math. 8, 102—107 (1953).

Nachdem Hilbert in seinen „Grundlagen der Geometrie“ gezeigt hatte, daß innerhalb seines Axiomensystems der erste Kongruenzsatz (Ax. III 5) nicht ohne weiteres auf gleichsinnige Kongruenz eingeschränkt werden kann, wurden verschiedene Zusatzaxiome vorgeschlagen, bei deren Einbeziehung in das System der Satz III 5 aus dem auf gleichsinnige Kongruenz eingeschränkten Axiom III 5* folgt. Es wird nun ein neuer Weg begangen, bei dem weder der Basiswinkelsatz für gleichschenklige Dreiecke noch Archimedizitätsforderungen herangezogen werden. Zu den Hilbertschen Axiomgruppen I–III — wobei III 5 durch das eingeschränkte Axiom III 5* ersetzt ist — treten neben je einer abgeschwächten Parallelenforderung die folgenden „Axiome des Polygoninhalts“ hinzu: (a) die Inhalte der Dreiecke bilden ein Größensystem $[\alpha + \beta \neq \alpha]$; wenn $\alpha \neq \beta$, so gibt es γ mit $\alpha + \gamma = \beta$ oder mit $\beta + \gamma = \alpha$. (b) gleichsinnig kongruente Dreiecke haben gleiche Inhalte, (c) bei der Zerlegung eines Dreiecks in zwei Teildreiecke ist der Inhalt des ganzen Dreiecks gleich der Summe der Inhalte der Teildreiecke. Der Kongruenzsatz III 5 ist hieraus allgemein beweisbar.

H. Arnold Schmidt.

Bompiani, Enrico: Sulle geometrie non-euclidean. Metrica iperbolica sulle superficie regolari chiuse di genere ≥ 2 . Archimede 5, 9—16 (1953).

Obige Zeitschriftenstelle ist im Titel der in diesem Zbl. 48, 372 besprochenen Arbeit gleichen Titels nachzutragen.

Elementargeometrie:

• **Hyltén-Cavallius, Carl und Lennart Sandgren:** Ebene Geometrie. Malmö: Hermods 1953. XI, 293 S. [Schwedisch].

Gupta, Hansraj: Non-concyclic sets of points. Proc. nat. Inst. Sci. India 19, 315—316 (1953).

Liegen $n > 3$ Punkte p_i der Ebene nicht auf einem Kreis, so gibt es einen Kreis, der genau drei der Punkte p_i enthält. Unterdessen hat Ch. A. Smirnova (s. dies. Zbl. 72, 386) die am Schluß geäußerte Vermutung des Verf. bewiesen, daß es sogar stets mindestens vier solcher Kreise gibt.

H. Lenz.

Balasubramanian, N.: A theorem on sets of points. Proc. nat. Inst. Sci. India 19, 839 (1953).

Der Satz von H. Gupta (s. vorstehendes Referat), der besagt, daß endlich viele Punkte in der Ebene auf einem Kreis liegen, wenn jeder Kreis durch drei dieser Punkte noch einen vierten Punkt enthält, bleibt richtig, wenn man die Voraussetzung dahin abschwächt, daß nur Kreise durch einen festen Punkt und zwei weitere Punkte der endlichen Punktmenge betrachtet werden.

Angelitch, Tatomir und Zagorka Šnajder: Über einige Sätze aus der Dreiecksgeometrie. Enseignement math. phys., Beograd 2, 31—39 (1953) [Serbo-kroatisch].

Boomstra, W.: Triangles équilatères inscrits dans une conique donnée. Anniversary Vol. Applied Mechanics, dedicated to C. B. Biezeno, 25—37 (1953).

Verf. untersucht die Aufgabe, gleichseitige Dreiecke zu konstruieren, die einem vorgegebenen Kegelschnitt einbeschrieben sind. Er findet, daß der geometrische Ort der Mittelpunkte der Umkreise dieser Dreiecke ebenfalls ein Kegelschnitt ist, dessen Gleichung sich leicht aus der des gegebenen Kegelschnittes finden läßt. Wählt man nun den Mittelpunkt P des Umkreises eines gesuchten Dreiecks willkürlich auf dem Ort, so kann man in einfacher Weise einen Punkt S auf dem gegebenen Kegelschnitt finden derart, daß der Kreis um P durch S gerade außer S die gesuchten Punkte enthält. Es handelt sich also um die Aufgabe, die Schnittpunkte eines Kreises und eines Kegelschnittes zu bestimmen, wenn schon einer vorliegt. Verf. diskutiert diese Aufgabe und zeigt die Verwandtschaft mit der Winkeltrisektion.

J. C. H. Gerretsen

Rényi, Alfred: Bemerkung über die Winkel eines Vielecks. Časopis Mat. 78, 305—306 (1953) [Tschechisch].

Sydler, J.-P.: Généralisation d'un théorème de M. Pompeiu. Elemente Math. 8, 136—138 (1953).

Eine n -dimensionale Verallgemeinerung des Satzes, daß die Abstände eines Punktes von den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks der Dreiecksungleichung genügen.

H. Lenz.

Hadwiger, H.: Über Gitter und Polyeder. Monatsh. Math. 57, 246—254 (1953).

Zwei Polyeder A und B des k -dimensionalen euklidischen Raumes R werden hinsichtlich einer kristallographischen Gruppe Γ mit endlichem Fundamentalbereich aus R als Γ -gleich, $A \simeq B$ bezeichnet, wenn B aus A durch eine Bewegung aus Γ gewonnen werden kann. Gilt dies für die im Sinne der Elementargeometrie endlich vielen eigentlichen Teilpolyeder A_i und B_i ($i = 1, 2, \dots, n$) von A und B , dann werden diese Polyeder als Γ -zerlegungsgleich $A \sim B$ bezeichnet. Die Γ -Ergänzungsgleichheit von Polyedern wird in üblicher Weise auf die Zerlegungsgleichheit zurückgeführt. Notwendig und hinreichend dafür, daß zwei eigentliche Polyeder A und B zerlegungsgleich oder ergänzungsgleich sind, ist die Übereinstimmung der Werte der Polyederfunktionale $\varphi(A) = \varphi(B)$, die sich vermittle der durch die Gruppe Γ erzeugten Gitter G gewinnen lassen. Zum Zwecke der Konstruktion dieser Funktionale wird zunächst der Grad ω der Zugehörigkeit eines Punktes p zu einem Polyeder A durch $\omega = \omega(p; A) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{J[K_\rho(p) \cdot A]}{J[K_\rho(p)]}$ erklärt, wobei $K_\rho(p)$ eine Kugel vom Radius ρ um p , $K_\rho(p) \cdot A$ den Durchschnitt dieser Kugel mit dem Polyeder A und $J[P]$ den Inhalt des Körpers P bezeichnet. Für ein durch die Anwendung aller Operationen a_i aus Γ aus einem Punkt p gewonnenes Gitter

$G = \sum_{\nu=0}^{\infty} p^{a_\nu}$ wird nun das Polyederfunktional $\varphi(A) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \omega(p^{a_\nu}; A)$ definiert, wobei die Summation über alle Operationen aus Γ zu erstrecken ist. Der Wert des Funktionals stellt im wesentlichen die Anzahl der im Polyeder A liegenden Punkte des Gitters G dar, wobei aber Randpunkte nach Maßgabe ihres Zugehörigkeitsgrades mitgezählt werden und Gitterpunkte, die Fixpunkte bezüglich einer Drehuntergruppe von Γ sind, entsprechend ihrer Vielfachheit zur Zählung beitragen. Die solcher Art definierten Polyederfunktionale erweisen sich als Γ -invariant, additiv, definit und normiert. Im Anschluß an den Beweis der notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit wird der Zusammenhang mit verwandten Fragestellungen hinsichtlich einer Translationsgruppe erörtert.

R. Inzinger.

Hopf, H.: Über Zusammenhänge zwischen Topologie und Metrik im Rahmen der elementaren Geometrie. Math.-phys. Semesterber. 3, 16—29 (1953).

In diesem instruktiven Vortrag behandelt Verf. die metrischen Beweise von Legendre und Steiner für den Eulerschen Polyedersatz und das Raumformenproblem (für geschlossene, orientierbare Flächen).

H. Pietsch.

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

Burau, Werner: Grundmannigfaltigkeiten der projektiven Geometrie. Collect. Mat., Barcelona 6, 125—220 (1953).

È il seguito di precedenti lavori: per le parti I e II si veda questo Zbl. 41, 474; per le parti III e IV questo Zbl. 49, 109. In detti lavori l'A. aveva introdotto e studiato le varietà di Veronese, Segre, Grassmann e altre ad esse collegate (varietà M_0). Il presente lavoro contiene le parti V e VI. La prima di esse è dedicata allo studio di un ulteriore tipo di varietà fondamentali e cioè la

varietà X di dimensione $\binom{k+2}{2}$ i cui punti rappresentano senza eccezioni gli X_k autopolari di una polarità nulla non degenerare in uno X_{2k+1} ; tale varietà si ottiene rappresentando anzitutto gli X_k di X_{2k+1} coi punti di una varietà di Grassmann $G_{2k+1;k}$ e considerando poi in questa i punti immagini di X_k autopolari. Per dette varietà ΓA determina le rette in esse contenute (ne passano ∞^k per ogni punto) e la dimensione dello spazio di appartenenza. Nella parte successiva vengono prese in considerazione insieme con le varietà X anche tutte le varietà già incontrate nelle parti precedenti; ΓA si propone di rappresentarle analiticamente secondo un criterio unitario mediante sistemi lineari di polinomi di grado k che si annullano simultaneamente in tutti e soli i punti della varietà. In attuazione di tale programma ΓA determina i sistemi lineari di relazioni quadratiche di dimensioni 5, 19 e 26 rispettivamente per la Γ_2^3 , la Γ_5^2 e la Γ_3^2 di Veronese. Determina poi ancora le relazioni quadratiche atte a definire le varietà di Segre $S_{m+1}, S_{m;n}$ nonché le curve razionali normali. Più complicato si presenta il problema analogo per le altre varietà fondamentali; ΓA lo risolve tuttavia in vari casi notevoli riferendosi alle varietà di Grassmann e alle M_G . Una visione d'insieme per tutte le varietà considerate è ottenuta infine provando per ciascun tipo la possibilità di una rappresentazione birazionale in uno spazio lineare analoga all'ordinaria proiezione stereografica di una quadrica.

P. Buzano.

Algebraische Geometrie:

Spampinato, Nicolò: Sull'estensione del teorema di Lüroth dall' S_1 complesso ad un S_1 ipercomplesso. Atti Accad. Ligure Sci. Lett. 9, 36—39 (1953).

Vgl. die in diesem Zbl. 53, 291 besprochene Arbeit gleichen Titels.

Longo, Carmelo: Approssimazione cremoniana delle trasformazioni puntuali fra piani in una coppia a jacobiano nullo di caratteristica zero. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 374—385 (1953).

Eine ebene Transformation T zwischen zwei Ebenen π, π' , die in der Umgebung eines Paares $O(0,0), O'(0,0)$ entsprechender Punkte analytisch sei, kann immer durch eine algebraische eindeutige, d. h. durch eine Cremonasche Transformation T_c bis auf eine beliebige Ordnung n angenähert werden, wenn die Jacobische Determinante J von T im Punkt O nicht verschwindet. Die Frage der Möglichkeit dieser Annäherung für den Fall, daß die Charakteristik q von J den Wert 1 hat, ist von C. F. Manara schon behandelt worden. Hier wird dieselbe Frage für den Fall behandelt, daß die Charakteristik q von J im Punkt O gleich Null ist. Wenn die Transformation T_c existiert, müssen die Geraden durch O' von T_c in Kurven verwandelt werden, die in O eine gewisse Multiplizität aufweisen, so daß T durch Gleichungen der Form $x' = q_h(x, y) + [h+1]_{xy}, y' = \psi_k(x, y) + [k+1]_{xy}$ in der Umgebung von O dargestellt werden kann (q_h, ψ_k sind homogene Polynome der Grade h und k , mit $2 \leq h \leq k$); die übrigen Glieder haben einen höheren Grad. Der Punkt O liegt somit auf der Jacobischen Kurve von T_c und O' ist ein Fundamentalpunkt der Transformation T_c in der Ebene π' . Dem Punkt O' entspricht durch T_c eine Fundamentalkurve Ω . Es wird zunächst die Kurve Ω untersucht. Die Bedingung $q = 0$ kann nur dann erfüllt werden, wenn Ω eine geeignete Form hat. Einmal muß die Transformation T_c in der Umgebung des Fundamentalpunktes O' weitere Fundamentalpunkte mit absteigenden Multiplizitäten aufweisen; es wird also vorausgesetzt, daß für T_c die unendlich benachbarten Fundamentalpunkte $O', O'_1, O'_2, \dots, O'_s$ vorhanden sind, welche auf einem linearen oder nicht linearen von O' ausgehenden Zweig liegen; ihre Multiplizitäten i, i_1, \dots, i_s sind den Bedingungen $i = i_1 = \dots = i_s$ unterworfen; zum anderen müssen die Differenzen $i = i_1, i_1 = i_2, \dots, i_{s-1} = i_s$ groß genug sein. Eine weitere Diskussion liefert alle Formen der Kurve Ω , für welche $q = 0$ ist. In den folgenden Kap. werden der Fall $h = 2$ und dann der allgemeine Fall $2 < h < k$ behandelt; in beiden Fällen werden einfache Gleichungen für T angegeben, falls die gewünschte Annäherung möglich ist.

E. Togliatti.

Matsusaka, Teruhisa: Some theorems on Abelian varieties. Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 4, 22—35 (1953).

Es sei U eine abstrakte Mannigfaltigkeit (im Sinne von [1]), welche ein normales Kompositionsgesetz (im Sinne von [2]) besitzt, und es sei k ein Definitionskörper für U und für das Kompositionsgesetz. Wenn U birational äquivalent zu einer abelschen Mannigfaltigkeit ist, so ist U sogar birational äquivalent über k zu einer abelschen Mannigfaltigkeit in einem projektiven Raum. — Dieser Satz wird in der vorliegenden Arbeit bewiesen. Er löst gleichzeitig zwei Probleme, die in dem an zweiter Stelle zitierten Buch von Weil offen gelassen wurden, nämlich: 1. das Problem der Einbettung einer abelschen Mannigfaltigkeit in einen projektiven Raum, und 2. das Problem der Konstruktion einer abelschen Mannigfaltigkeit aus einer Mannigfaltigkeit mit Kompositionsgesetz ohne Grundkörpererweiterung. — Seit Erscheinen dieser Arbeit haben sich mehrere Autoren mit denselben oder weitergehenden Problemen beschäftigt; eine Zusammenstellung der diesbezüglichen Literatur findet man in dem Buch von S. Lang, *Abelian varieties*, New York 1958. Zu der vorliegenden Arbeit vgl. auch die beiden Ergänzungen (vgl. dies. Zbl. 57. 369, 370). [1] Weil, *Foundations of algebraic geometry*; New York 1946. [2] Weil, *Variétés abéliennes et courbes algébriques*, dies. Zbl. 37, 162. P. Roquette.

Severi, Francesco: Un'osservazione sul limite d'applicabilità della formula di postulazione per una varietà algebrica. *Atti Accad. Ligure Sci. Lett.* 9, 23—28 (1953).

Verf. nennt die durch ein Polynom des Grades d in l dargestellte Postulationsformel $q(l; V)$ einer irreduziblen algebraischen Mannigfaltigkeit V_d die „reguläre Postulation“: sie gilt erst von einer gewissen unteren Grenze $l \geq \lambda$ ab; auf andere Grade l angewendet heißt sie „virtuelle Postulation“, die mit der „effektiven Postulation“ (Hilbertfunktion), d. i. die Anzahl der unabhängigen linearen Bedingungen, denen eine die V_d enthaltende Hyperfläche des Grades l unterliegt, im allgemeinen nicht übereinstimmt. Zweck der Untersuchung ist die Festlegung der unteren Grenze λ , von der ab Postulationsformel und Hilbertfunktion übereinstimmen. In erschöpfender Weise kann diese Frage erst beantwortet werden, wenn man die Syzygienkette des V_d zugeordneten H -Ideals kennt. Verf. beweist hier u. a., daß in dem speziellen Fall, daß V_d die Ordnung m hat und zugleich mit den linearen Schnitten arithmetisch normal ist, $\lambda = m - d - 1$ gilt.

W. Gröbner.

Marchionna, Ermanno: Sulle proiezioni delle varietà intersezioni complete di due ipersuperficie. *Boll. Un. mat. Ital.*, III, Ser. 8, 265—268 (1953).

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une hypersurface F d'ordre mn appartenant à un hyperspace P à $r - 1$ dimensions soit projection d'une variété F' (sans variétés multiples à $r - 3$ dimensions), intersection complète de 2 formes d'ordre m et n est que: 1. la variété double D_{r-2} de F soit d'ordre $d = \frac{1}{2} mn(m-1)(n-1)$ et appartienne à une forme f_l de P d'ordre $l = (m-1)(n-1)$. — 2. qu'il existe une sous-adjointe f_{l+1} de F coupant F outre D selon une variété G intersection complète de deux formes de P d'ordre m et n . La démonstration de nécessité se ramène à un résultat déjà donné par l'A. (v. ce Zbl. 52. 378, 379), la suffisance à partir d'une représentation monoïdale. En général la deuxième condition résulte de la première, mais il existe des cas où la seconde est indépendante de la première; on peut en déduire une précision du théorème d'Halphen.

B. d'Orgeval.

Marchionna, Ermanno: Sulle varietà aritmeticamente normali. *Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena* 6 (1951—52), 45—56 (1953).

L'A. recherche les conditions pour qu'une variété algébrique soit arithmétique-normale, c'est-à-dire soit une variété sur laquelle les hypersurfaces de tout ordre découpent des systèmes linéaires complets. Il considère en premier lieu le cas d'une courbe de S_3 : Si une courbe C est l'intersection complète de deux surfaces et formée de deux courbes C_1, C_2 et si C'', C'_1, C'_2 sont les projections de C, C_1, C_2 sur un plan d'un point générique, la condition nécessaire et suffisante pour que C_1 soit arithmétiquement normale est que les cônes d'ordre quelconque passant par les points doubles apparents de C_1, C_2 découpent sur C'_1 des séries linéaires complètes. L'extension aux courbes

d'un S_r s'obtient en considérant les projections des courbes à partir d'un S_{r-3} . Plus généralement, si Γ est une courbe algébrique de S_3 et γ sa projection d'un point O sur un plan α , si K_0 est le groupe découpé sur γ (en dehors des points doubles apparents) par un cône de sommet O , d'ordre λ , passant par les points doubles apparents, la condition nécessaire et suffisante pour que Γ soit arithmétiquement normale est que les adjointes à γ d'ordre $\lambda + l$, passant par K_0 , appartiennent au module déterminé par γ et par les adjointes irréductibles d'ordre $\lambda, \lambda + 1, \dots, \lambda + l$. Extension de ce dernier théorème aux variétés à $r - 2$ dimensions de S_r . L. Godeaux.

Roth, Leonard: On threefolds of linear genus unity. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 34, 247—276 (1953).

Par analogie avec les surfaces de genre linéaire $p(1) = 1$, l'A. étudie les variétés à trois dimensions dont le genre curviligne du système canonique est égal à 1 et par conséquent le degré virtuel nul. Il partage ces variétés en quatre classes: I. Variétés dont les systèmes canonique et pluricanoniques sont tous virtuels, analogues aux surfaces réglées; II. Variétés possédant des surfaces canonique et pluricanoniques toutes isolées (éventuellement d'ordre zéro); III. Variétés dont les systèmes canonique et pluricanoniques sont composés au moyen d'un faisceau de degré virtuel zéro, les courbes caractéristiques du système étant d'ordre zéro; IV. Variétés analogues où les courbes caractéristiques sont d'ordre supérieur à zéro. Il étudie ces différentes variétés et donne des exemples. L. Godeaux.

Roth, Leonard: On elliptic threefolds. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 2, 141—158 (1953).

Etude des variétés algébriques à trois dimensions contenant une congruence linéaire de courbes elliptiques birationnellement équivalentes et un faisceau elliptique de surfaces non composées au moyen de la congruence et birationnellement équivalentes. Groupe de transformations de la variété en soi et construction des systèmes canonique et pluricanoniques. L. Godeaux.

Nollet, Louis: Quelques propriétés nouvelles des courbes tracées sur une surface algébrique. Acad. roy. Belgique. Cl. Sci. Mém., Coll. 8°, 28, Nr. 3, 40 S. (1953).

L'intérêt de ce mémoire est l'introduction de quelques notions nouvelles indispensables à une étude détaillée et rigoureuse de la classification des surfaces. Dans un premier chapitre l'A. rappelle les résultats connus sur les variétés algébriques, multiplicités d'intersection, d'équivalence arithmétique. Une courbe C sur une surface algébrique F sera une variété pure de dimension 1; elle sera dite positive si $[C, X] \geq 0$ quelque soit la courbe X irréductible sur F . Cette notion est invariante par rapport aux transformations birationnelles, à l'équivalence, au produit par un entier positif, à la somme. Si C se réduit à $\sum_1^F h_i C_i$, les courbes effectives X se réduisant à $\sum_1^F k_i C_i$, ($0 \leq k_i \leq h_i$, $0 < \sum k_i < \sum h_i$) dites parties de C définissent un indice de connexion: $m_c = \text{Minimum } [X, C - X]$; si cet indice est nul la courbe est connexe, s'il est positif elle sera dite préconnexe. Une courbe positive est préconnexe ou irréductible, mais la connexion n'est pas toujours réalisée. Le Ch. 3 est consacré à la recherche d'une condition nécessaire de connexion, par utilisation du th. de Riemann-Roch sur une multiple assez ample dont l'A. montre l'irréductibilité de la partie variable; la condition de connexion d'une courbe positive effective est que le degré de C soit positif. Comme application immédiate on retrouve les principes de "spezzamento" d'Enriques et Franchetta. Ce résultat s'étend aux courbes pseudo-irréductibles c'est à dire telles que hC soit linéairement équivalente à une courbe irréductible. Le Ch. 4 apporte des compléments à l'étude des courbes connexes, en particulier une propriété caractéristique; l'A. étudie également les courbes fondamentales d'un système algébrique et les lie à l'étude de la connexion; il définit en outre une opération dite B -adjonction qui associe à $|C|$, un B -adjoint $|C'| = |C + B|$ B étant arithmétiquement équivalent à une courbe canonique; de l'étude de cette adjonction on déduit que si

le système des B -adjointes à une courbe X effective est régulier d'ordre positif ou nul il en est de même du B -adjoint à toute courbe connexe C dont X est partie. Le Ch. 5 est consacré à établir le th. de pseudo-irréductibilité; d'abord est montré que sur une surface qui ne possède pas un faisceau de courbes unicursales, si C est une courbe effective de degré positif, la partie fixe f_h de $|hC|$ vérifie $[C, f_h] \leq [K, C]$ (K canonique); si C est positive, la surabondance de $|hC|$ est bornée. Si quelque soit la composante C_i de C , on a $[C, C_i] > 0$, la courbe est dite fortement positive: elle est connexe ou irréductible. Toute courbe est différence de deux courbes fortement positives. On en déduit que pour toute surface non réglée à une réglée, toute courbe effective positive est pseudo-irréductible. Ces propriétés s'étendent aux courbes strictement positives pour lesquelles on a $[C, X] > 0$ sans égalité possible.

B. d'Orgeval.

Tibiletti, Cesarina: Determinazione algebrica geometrica di piani tripli e piani quadrupli con la stessa curva di diramazione. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 86, 86—100 (1953).

Eine vierfache Ebene kann dieselbe Verzweigungskurve haben wie eine gegebene dreifache Ebene. Verf. hat diese Frage schon behandelt (dies. Zbl. 46, 385); dieselbe Frage wird hier mit algebraisch-geometrischen Methoden wieder aufgenommen. Es sei eine allgemeine irreduzible dreifache Ebene $F: f(x, y, z) = az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ gegeben (wo a, b, c, d Polynome in x, y bedeuten). Es sei dann eine Gleichung $u^2 = A z^3 + B z + C$ (wo A, B, C ebenfalls Polynome in x, y bedeuten) gegeben, welche eine Funktion w auf F definiert, die keine Verzweigung aufweist. Einem allgemeinen Wertepaar (x, y) entsprechen so drei Werte z_1, z_2, z_3 von z und sechs Werte $w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}, w_{31}, w_{32}$ von w . Verf. beweist, daß die Summe $u = w_{11} - w_{21} - w_{31}$ eine vierwertige Funktion ist, die eine vierfache Ebene mit derselben Verzweigungskurve liefert wie die gegebene dreifache Ebene. Die vierfachen Ebenen u sind voneinander birational verschieden, wenn die entsprechenden Funktionen w es sind. Die höchste Anzahl der so gewonnenen birational verschiedenen Funktionen u ist $2^{2p} - 1$, wo p das Geschlecht der gegebenen dreifachen Ebene ist. Ihre Anzahl ist mit der Anzahl der linearen Nullteiler der Division durch 2 auf F identisch. — Eine Anwendung wird dann auf folgende Verzweigungskurven dreifacher Ebenen gemacht: a) Die Kurve 6. Ordnung mit 6 auf einem Kegelschnitt liegenden Spitzen ist Verzweigungskurve für keine vierfache Ebene; b) Die Kurve 6. Ordnung mit 6 Spitzen und 4 Knoten ist Verzweigungskurve auch für eine vierfache Ebene; c) Die Kurve 6. Ordnung mit 9 Spitzen ist auch Verzweigungskurve für drei vierfache Ebenen.

E. Togliatti.

Vesentini, Edoardo: Sul comportamento effettivo delle curve polari nei punti multipli. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 34, 219—245 (1953).

Enriques gab in einer Arbeit in Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., V. Ser. 25, 607—613 (1916) ein Alternativgesetz für das Verhalten der ersten Polaren eines allgemeinen Punktes in bezug auf eine hinreichend allgemeine Kurve in einer Singularität beliebiger Art. B. Segre zeigte (dies. Zbl. 46, 389; 50, 373) einige Beispiele, für die dies Gesetz nicht stimmt. Verf. bestimmt nun die genauen Bedingungen, die der Punkt oder die Kurve erfüllen muß, damit dieses Gesetz ergänzungsbedürftig wird, und gibt die Ergänzungen. Er arbeitet dabei mit dem Newtonschen Polygon und mit der Kettenbruchentwicklung des charakteristischen Exponenten. Es erweisen sich umfangreiche und subtile Überlegungen sowie zahlreiche Fallunterscheidungen als notwendig, die Ref. jedoch hier nicht wiedergeben kann.

O.-H. Keller.

Vesentini, Edoardo: Sulle molteplicità effettive delle curve polari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 209—212 (1953).

È noto (Noether) che, data una curva, C , le sue polari prime passano con la molteplicità $r - 1$ per ogni punto, P , che sia r -plo per la C . Ciò riguarda però le molteplicità virtuali, che possono risultare maggiori di quelle effettive, quando si tratti di punti multipli della C non situati a distanza finita, ma infinitamente vicini ad altri, nei loro successivi „intorni“. Di questa circostanza ha indicato alcuni esempi anche B. Segre (questo Zbl. 46, 389), i quali hanno indotto l'A. ad esaminare i motivi e la natura di siffatte eccezioni. In un lavoro di ampia mole pubblicato altrove, egli è giunto a risultati che qui riassume, e che gli consentono di affermare come il comportamento nel punto singolare P della generica polare di C dipenda, in maniera essenziale, dalla particolarità della C nell'ideale associato a quella singolarità. Per tale via caratterizza il caso ordinario, in cui non si presentano differenze fra le molteplicità effettive e le virtuali, attraverso l'esame dei valori dei coefficienti dell'equazione della C , alcuni dei quali debbono risultare diversi da zero: geometricamente ciò significa che si tratta di tutte e sole le C aventi le generiche polari prime dotate del minimo numero di diramazioni in P . Il modo di comportarsi delle polari in P si ricollega con il teorema stabilito dall'Enriques e da lui denominato legge di alternanza, e, per conseguenza, con i principi di scaricamento e di scorrimento formulati dallo stesso Enriques. Così anche queste proprietà necessitano delle precisazioni fatte dall'A. e subiscono le corrispondenti limitazioni. In tale senso l'A. riprende in esame una disuguaglianza, dovuta ad L. Campedelli (questo Zbl. 49, 389), che lega la somma delle molteplicità effettive delle polari prime nei punti infinitamente vicini ad un punto considerato, alla somma delle molteplicità virtuali. E, riconoscendone esplicitamente la validità nel caso che interessava il Campedelli, osserva come, sotto diverse ipotesi, essa possa risultare soggetta ad alcune restrizioni per i suoi legami con i principi sopra richiamati. Giova avvertire, a chiarimento della questione, che l'A., come già B. Segre, si riferisce ad esempi concreti, a curve delle quali si sa scrivere l'equazione; mentre il Campedelli considera un caso puramente ipotetico (presenza di infiniti punti multipli infinitamente vicini ad un altro, nei suoi successivi intorni), allo scopo di provare che in questo non possono verificarsi le anomalie riscontrate sopra alcune curve particolari, consentendo così di liberare da ogni dubbio il ragionamento classico (esistenza di infiniti punti comuni ad una curva irriducibile ed alla polare prima di un punto generico del piano rispetto ad essa) che mostra l'assurdità di quella medesima ipotesi da cui si parte.

L. Campedelli.

Fiedler, Miroslav: Über gewisse Matrizen und die Parametergleichung der Singularitäten einer rationalen Kurve. Časopis Mat. 77, 243–265 (1952), 321–346 (1953) [Tschechisch].

Verf. ordnet einer binären Form $a_0 t_1^n + a_1 t_1^{n-1} t_2 + \dots + a_n t_2^n$ eine Folge von Matrizen

$$A_m^{(n)} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

zu, wo $m \geq 1$ die Anzahl der Zeilen ist. Weiter definiert er den sogenannten Defekt von $A_m^{(n)}$ als Differenz der Anzahl der Spalten und des Ranges der Matrizen. Ähnliche Matrizen werden auch für mehrere Formen eingeführt, und es zeigt sich, daß der Defekt solcher Matrizen gleich der Ordnung des größten gemeinsamen Teilers aller Formen ist. Dieses Hauptresultat (und noch andere mehr) werden dann zur Untersuchung der rationalen Kurven angewendet, was endlich zur Konstruktion einer Form führt, nämlich der Parametergleichung der Singularitäten einer gegebenen rationalen Kurve. Im zweiten Teil der Arbeit beschränkt sich Verf. auf die ebenen rationalen Kurven und ist imstande, für diesen Fall seine früheren Ergebnisse zu vertiefen.

J. Metelka.

Brusotti, Luigi: Sopra alcune questioni di geometria suggerite dalla teoria delle equazioni a derivate parziali totalmente iperboliche. Acad. roy. Belgique. Bull. Cl. Sci., V. Ser. 39, 381—404 (1953).

La ricerca è suggerita da quesiti proposti in una conferenza di F. Bureau (questo Zbl. 36, 341), ma si svolge indipendente da tale riferimento. — In uno iperspazio S_p si considerano le ipersuperficie algebriche reali d'ordine $2n$ la cui parte reale consti di n falde le quali, mediante un omeomorfismo fra iperspazi, possano ridursi ad n ipersfere concentriche. Con impostazione tanto proiettiva quanto affine si danno criteri idonei a stabilire se una ipersuperficie di S_p sia del tipo descritto. Si considerano estensioni, con intervento di ipersuperficie anche d'ordine dispari (aggiungendo allora al sistema di ipersfere concentriche un iperpiano ad esse esterno), e particolarizzazioni (imponendo che ciascuna falda sia un ovoide). Con procedimenti costruttivi opportuni si forniscono infine esempi di ipersuperficie nelle condizioni illustrate. Sempre è tenuto in particolare evidenza il caso, $p = 2$, delle curve piane.

V. E. Galafassi.

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

• Denis-Papin, M. et A. Kaufmann: Cours de calcul tensoriel appliqué. (Géométrie différentielle absolue.) Paris: Albin Michel 1953. 388 p. fr 3440.

Dieses Buch erscheint in der „Bibliothèque de l'ingénieur électricien-mécanicien“ und ist anscheinend für einen Leserkreis mit sehr geringer Vorschulung bestimmt. Daraus erklärt sich, daß die Einführung in die Tensorrechnung, die nirgends über das allereinfachste hinausgeht, dennoch 200 Seiten in Anspruch nimmt. Es folgen 48 Seiten über Dynamik der kontinuierlichen Medien, 50 Seiten über die Theorie der elektrischen Netze nach G. Kron, 20 Seiten über einfache Relativitätstheorie und 4 Seiten über Maxwell'sche Gleichungen. Wie aus einem Vorwort des Direktors der höheren technischen Schule in Grenoble hervorgeht, ist die Form des Buches pädagogisch durchaus verantwortet.

J. A. Schouten.

Krejn, S. G.: Über die funktionalen Eigenschaften der Operatoren der Vektoranalysis und der Hydrodynamik. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 969—972 (1953) [Russisch].

The note is a study of the properties of linear operators of the vector analysis and hydrodynamics given in Hilbert spaces, connected with the boundary problem of the viscous liquid hydrodynamics.

W. Wrona.

Moroškin, Ju. F.: Über die Formen der Fundamentalgleichungen der Geometrie der Mechanismen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 745—748 (1953) [Russisch].

The author presents in this paper two basic equations of the geometry of mechanisms in matrix form. These equations give twelve scalar equations among which six ones are independent. These matrix equations can be simplified; then they play the role of the transform's equations and represent the basic equations of the mechanisms. The transforms are given for two kinds of coordinates, punctual and line ones.

D. Rašković.

Müller, Hans Robert: Flächenläufige Bewegungsvorgänge im elliptischen Raum. I, II. Monatsh. Math. 57, 29—43, 129—133 (1953).

Im ersten Teil werden zweigliedrige Bewegungen mit Hilfe des Kalküls der Pfaffschen Formen und der dem elliptischen Raum angepaßten Quaternionenschreibweise behandelt, wobei der Gangraum und der Rastraum je durch ein absolut polares Tetraeder repräsentiert werden und der Bewegungsvorgang auf ein Bezugstetraeder bezogen wird. Die Ableitungsgleichungen werden mittels „Pfaffscher Drehvektoren“ auf eine einfache Form gebracht. Die auf sie angewandten Integrierbarkeitsbedingungen führen auf Beziehungen zwischen den Drehvektoren, deren geometrische Deutung Aussagen über die momentanen Schraubenachsen der Bewegung erlaubt. Die Betrachtung der Abbildung der von allen Momentanachsen eines Bewegungszustandes

senkrecht geschnittenen „Polachsen“ auf die Punktepaare einer Kugel führt zu Sätzen über die von ihnen im Gang- und Rastraum gebildeten Strahlensysteme. Im zweiten Teil wird der Inhalt des Raumstückes berechnet, das von der geschlossenen Fläche begrenzt wird, die ein an einer zweigliedrigen Bewegung teilnehmender Punkt beschreibt.
F. Löbell.

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Wróbel (Vrubel'), T. H.: Über eine gewisse Form der Gleichungen von Gol'ab. *Biuletyn wojskowej Akad. techn.* **6**, 43–50, 101–108 (1953) [Polnisch und Russisch].

Der Verf. hat die Darboux'schen Gleichungen einer Kurve auf einer Fläche für Kurven auf einer $(n-1)$ -dimensionalen Hyperfläche in dem Sinne verallgemeinert, daß er mit der Kurve ein orthonormales n -Bein (das aus Vektoren t_1, \dots, t_n gebildet wird) verknüpft hat. Dabei ist t_1 der tangentielle Vektor, t_n normal zur Hyperfläche. Die Vektoren t_2, \dots, t_{n-1} liegen in der Tangentialhyperebene und sind längs der Kurve eindeutig bestimmt, falls sie in einem Punkte fest gewählt sind. Der Verf. verallgemeinert das Analogon der sogenannten Lancret'schen Relation (S. Gol'ab, dies. Zbl. **60**, 383) und beweist den Satz, daß die Vektoren Dt_1, \dots, Dt_n in einer entweder zwei- oder vierdimensionalen Ebene liegen.
S. Gol'ab.

Nozička, František: Die Krümmungsskalare einer Hyperfläche im Euklidischen Raume und ihre geometrische Bedeutung. *Časopis Mat.* **77**, 347–372 (1953) [Tschechisch].

Soit $a_{\lambda\mu}$ le premier et $h_{\lambda\mu}$ le second tenseur métrique de l'hypersurface V_n plongée dans l'espace euclidien E_{n+1} ($n \geq 2$). On dit qu'un vecteur u^ν détermine la direction principale dans un point de la variété V_n , si $(h_\nu^\alpha - s \delta_\nu^\alpha) u^\nu = 0$ ($h_\nu^\alpha = h_{\nu\mu} a^{\mu\alpha}$). Les racines s_i ($i = 1, \dots, n$) de l'équation caractéristique $\sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} K_{(r)} s^{n-r} = 0$ du système précédent s'appellent courbures principales et les scalaires $K_{(r)}$ ($r = 1, \dots, n$) courbures de l'hypersurface V_n . L'A. donne les interprétations géométriques des courbures $K_{(r)}$ et il emploie, dans ce but, la représentation sphérique de l'hypersurface en question.
K. Svoboda.

Marcus, F.: Sur un système de lignes isothermiquement conjugués sur une surface. *Comun. Acad. Republ. popul. Române* **3**, 175–177, russ. und französ. Zusammenfassg. 177–178 (1953) [Rumänisch].

On considère une surface rapportée à un système conjugué dont les invariants sont h et k ; en même temps soient \bar{h} et \bar{k} les invariants de l'équation de Laplace vérifiée par les cosinus directeurs de la normale de la surface. La condition nécessaire et suffisante pour que le système considéré soit isotherme conjugué est $\bar{h} + \bar{h} = k + k$.
Gh. Th. Gheorghiu.

Myller, A.: Chemins de profil longitudinal donné. *Acad. Republ. popul. Române, Fil. Iasi, Studii Cerc. ști.* **4**, 1–16, russ. und französ. Zusammenfassg. 17 (1953) [Rumänisch].

Le profil longitudinal P d'un chemin C situé sur une surface $z = z(x, y)$ est la courbe obtenue par le développement du cylindre passant par C et à génératrices parallèles à Oz . Étant donnée la courbe $z = z(z)$, les chemins qui l'ont pour profil longitudinal sont donnés par l'équation (1) $dx^2 + dy^2 = z'^2(z) (p dx + q dy)^2$. Elles forment dans le plan x, y un réseau sans détour. Diverses applications: Cas où le réseau défini par (1) est à angle constant le long d'une famille de lignes de niveau (alors la surface est une surface moulure); cas où les courbes de niveau sont obtenues de l'une d'entre elles par translations: courbes de niveau conchoïdales; courbes de niveau parallèles. Est résolu aussi le problème inverse, de déterminer le réseau, quand on connaît une des familles.
M. Haimorici.

Myller, A.: L'équation arco-radiale de Sylvester. Acad. Republ. popul. Române. Fil. Iași. Studii Cerc. ști. 4, 19—28, russ. und französ. Zusammenfassg. 28 (1953) [Rumänisch].

L'A. généralise sur une surface les propriétés de la représentation d'une courbe par une équation de la forme $(1) s = f(r)$ (s = longueur des arcs sur la courbe, r = rayon vecteur). Une surface (S) soit représentée par l'équation (en coordonnées sphériques) $r = r(\omega, \theta)$. Les courbes représentées par (1) vérifient sur (S) l'équation $(1) (r^2 \sin^2 \theta - (1 - f'^2) r_\omega^2) d\omega^2 - 2(1 - f'^2) r_\omega r_\theta d\omega d\theta + (r^2 - (1 - f'^2) r_\theta^2) d\theta^2 = 0$. Elles forment un réseau dans détour. Sont établies quelques propriétés géométriques de ce réseau. p. ex.: les courbes coupent le rayon vecteur selon un angle qui ne dépend que de la distance à l'origine du point d'intersection. etc. L'équation (1) s'intègre par quadratures, quand: a) $r_\omega = 0$, b) $r^2 + (1 - f'^2) r_\theta^2 = 0$. M. Haimovici.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Laptev, G. F.: Differentialgeometrie eingebetteter Mannigfaltigkeiten. Die gruppentheoretische Methode differentialgeometrischer Untersuchungen. Trudy Moskovsk. mat. Obšč. 2, 275—382 (1953) [Russisch].

The purpose of this paper is the construction of the unitary invariant method of differential-geometrical investigations of immersed varieties on the ground of the theory of exterior differential forms and of the theory of representations of continuous groups. All constructions of this paper are being developed in the space of geometrical elements with a fundamental-group connection. Such spaces are direct generalizations of homogenous spaces with an arbitrary generating element and Cartan spaces with various connections. The author obtains the following results: I. He proves the existence of a complete fundamental object defining the immersed variety up to arbitrary constants and playing the part of a couple of quadratic forms of the metric geometry of the surface. The construction of the object is obtained by a finite number of prolongations of the original fundamental object i. e. in a rational algebraic way. II. He defines the basic fundamental object of an immersed space (also obtainable by a finite number of prolongations) including fields with arbitrary generating objects. This object initiates the intrinsic geometry of an immersed space. III. He shows that the field of the geometrical object defined by the field of arbitrary order differential neighbourhoods of the immersed space is included in the fundamental field of the same order. IV. He gives a complete construction of the projective differential geometry of a hypersurface by means of the prolongation and inclusion method. This construction has a purely algebraic and quite invariant character. In particular the invariant formulas defining the fundamental geometrical constructions of the projective differential geometry of the ordinary surface are obtained. In the first chapter is given a summary of the fundamental theorems and formulas referring to invariant group forms. At the same time are explained the elements of the theory of geometrical objects on the ground of differential equations systems defining them.

W. Wrona.

Oprea, A.: Interprétation tangentielle du groupe euclidien. Acad. Republ. popul. Române. Fil. Iași. Studii Cerc. ști. 4, 53—65, russ. und französ. Zusammenfassg. 65—67 (1953) [Rumänisch].

L'A. s'occupe de l'étude des surfaces (S) dans la géométrie du groupe de transformations $u_i = a_i^0 + a_i^j u_j$ ($i, j = 1, 2, 3$). u_j étant les coordonnées d'un plan tangent et a_i^j les coefficients d'une transformation euclidienne. La géométrie de ces surfaces est identique à celle des inverses (Σ) par rapport à la sphère unité des polaires par rapport à l'origine des surfaces (S) . On donne des interprétations géométriques des invariants de Σ dans la géométrie tangentielle, à l'aide de certaines développables, faisant partie de l'ensemble des plans tangents de S . On utilise à ce but des „développables de courbure“, „asymptotiques“ etc. Adolf Haimovici.

Arghiriade, Em.: Sur les quadriques osculatoires d'une surface. Comun. Acad. Republ. popul. Române 3, 19—23, russ. und französ. Zusammenfassg. 22—23 (1953) [Rumänisch].

On considère les quadriques ayant avec une surface dans un point x , un contact du 2ième ordre et dont la courbe d'intersection avec la surface a un point triple a tangentes coïncidentes, ces quadriques formant trois faisceaux. Les polaires

d'une droite d passant par x par rapport à ces trois faisceaux sont les tangentes d'inflexion de l'antihessienne de la cubique qui correspond à d dans la correspondance de Segre.

Gh. Th. Gheorghiu.

Argiriade, Em.: Sur la polarité par rapport aux quadriques osculatrices d'une surface. *Comun. Acad. Republ. popul. Române* 3, 179--185, russ. und französ. Zusammenfassg. 184 (1953) [Rumänisch].

Une droite d passant par un point x d'une surface α pour homologue dans la correspondance de Segre, une cubique C'_3 dans le plan tangent. Soit H'_1 la cubique qui admet C'_3 pour hessienne et T'_1 la cayleyenne de H'_1 . La conique T'_1 est l'enveloppe des droites polaires de d par rapport aux quadriques de B . Gambier.

Gh. Th. Gheorghiu.

Finikov, S. P.: Zwei Probleme der modernen Differentialgeometrie. *Vestnik Moskovsk. Univ.* 8, Nr. 6 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 4), 3—14 (1953) [Russisch].

Verf. bespricht zwei Probleme der klassischen Differentialgeometrie, die seine Schüler bearbeitet haben. Das erste Problem betrifft die konjugierten Netze und Geradenkongruenzen. Das zweite steht in enger Beziehung zu dem Vertauschbarkeitssatz der asymptotischen Transformationen.

W. Wrona.

Vaona, Guido: Sulle trasformazioni puntuali di 2^a e 3^a specie fra piani. *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* 2, 449—455 (1953).

Borůvka a classé les transformations ponctuelles entre deux plans projectifs selon la nature des trois directions caractéristiques issues d'un point générique: si distinctes: 1^{er} type, si deux confondues: 2^e type, si trois confondues: 3^e type, si toutes les directions sont caractéristiques: 4^e type. De la comparaison de l'équation différentielle des courbes caractéristiques de la transformation, des conditions pour qu'une droite donnée soit inflexionnelle de 2^e, 3^e, ou 4^e espèce et pour qu'une courbe caractéristique soit une droite, l'A. déduit a) Pour une transformation du 1^{er} type, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une direction caractéristique soit inflexionnelle de 2^e espèce est que les courbes caractéristiques soient des droites. — b) Dans les transformations du 3^e type, les droites caractéristiques sont en général inflexionnelles de 3^e espèce, elles le sont de 4^e espèce si et seulement si les courbes caractéristiques sont des droites. — c) Dans les transformations du 2^e type, les droites caractéristiques doubles sont en général inflexionnelles de 2^e espèce; elles le sont de 3^e espèce si et seulement si les courbes caractéristiques sont des droites. Enfin l'A. établit que dans une transformation T du 3^e type, la projectivité caractéristique intermédiaire entre un couple de droites caractéristiques est une approximation de T du 3^e ordre; elle sera du 4^e ordre si les courbes caractéristiques sont des droites.

B. d'Orgeval.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Haimovici, Adolf: Considerations sur les réseaux dans un espace à trois dimensions. *Acad. Republ. popul. Române, Fil Iași, Studii Cerc. ști.* 4, 29—50, russ. und französ. Zusammenfassg. 50—52 (1953) [Rumänisch].

La note contient l'étude des réseaux d'un espace riemannien à trois dimensions à l'aide de la méthode tensorielle. En partant d'un tenseur covariant g_{ij} du réseau, on fait un étude de celui-ci utilisant la théorie des courbes planes d'ordre 3. On introduit de cette manière une série de tenseurs et d'invariants à l'aide desquels on peut déterminer un étude métrique du réseau. On détermine aussi les conditions d'holonomie du réseau. Avec les symboles introduits on trouve les conditions pour que le réseau soit un réseau Tchébycheff fort ou faible, ou qu'il sont formé par des géodésiques, ou encore qu'il soit semi-Tchébycheff. Il y en a d'autres applications.

Gh. Th. Gheorghiu.

Tachibana, Syun-ichi: On the imbedding problem of spaces of constant curvature in one another. *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.* 4, 44—50 (1953).

In the present paper the following theorem is proved: Let S_n, S_N be spaces of constant curvature with K, \bar{K} respectively. Then (A) if $\bar{K} > K$ and $N = n - 1$ (B) if $\bar{K} = K = 0$ and $N = 2n - 1$ a given S_n can be imbedded in any S_N isometrically in either case. The above problem was previously investigated by A. Fialkow (this Zbl. 18, 236) who has obtained in a different manner the results corresponding to (A), and by A. E. Lieber (this Zbl. 29, 165). *T. Postelnicu.*

Rauch, H. E.: On differential geometry in the large. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 440—442 (1953).

Rauch, H. E.: Geodesics, symmetric spaces and differential geometry in the large. Commentarii math. Helvet. 27, 294—320 (1953).

Soit E^n un espace de Riemann symétrique, à courbure positive, simplement connexe et M^n un espace de Riemann complet, de classe C^3 , ayant le groupe d'holonomie restreint H_P , $P \in M^n$, isomorphe à un sous-groupe du groupe d'holonomie \tilde{H}_O , ($O \in E^n$) de E^n , par un isomorphisme induit par un isomorphisme h_P des espaces linéaires tangents en P et O à M^n et E^n , donc $(1) h_P H_P h_P^{-1} \subseteq \tilde{H}_O$. L'A. montre qu'on peut associer à l'espace E^n une constante $c = c(E^n)$, ($0 < c < 1$) ayant la propriété suivante: toute variété M^n , ayant la propriété (1) et satisfaisant à la condition que la courbure riemannienne $K(P, r)$ d'une facette plane r tangente à M^n est comprise entre la courbure riemannienne $\bar{K}(O, h_P r)$ de la facette transformée $h_P r$ et entre $c \bar{K}(O, h_P r)$, admet l'espace E^n pour variété universelle (topologique et non nécessairement métrique) de recouvrement. La démonstration utilise les propriétés des géodésiques issues d'un point de M^n et de leurs points conjugués. Le Ref. remarque que dans le cas d'un espace symétrique E^n , compact, à courbure non-négative et non partout positive, la condition (1) implique: M^n est un espace symétrique ou localement symétrique, si $n \neq 7, 8, 16$ [voir la Thèse de M. Berger, Bull. Soc. math. France 83, 279—330 (1955)]. *C. Teleman.*

Busemann, Herbert: Metriken auf dem Torus ohne konjugierte Punkte. Bol. Soc. mat. Mexicana 10, Nr. 1/2, 12—29 (1953) [Spanisch].

Busemann, Herbert: Metrics on the torus without conjugate points. Bol. Soc. mat. Mexicana 10, Nr. 3/4, 1—18 (1953).

Die meisten geometrischen Sätze über Riemannsche Räume erweisen sich als unabhängig vom Riemannschen Charakter der Metrik: sie sind in Wirklichkeit Spezialfälle von Sätzen über Finsler-Räume. Ein wichtiges Beispiel einer Eigenschaft, die sich nicht von Riemannschen Räumen auf Finsler-Räume erweitern läßt, gibt der Satz von Beltrami: Die Riemannschen Räume mit Geraden als geodätische Linien sind als Räume konstanter Krümmung gekennzeichnet. Verf. zeigt nun, daß von nicht-ausdehnbarem Typ auch der Satz von Morse-Hedlund und E. Hopf ist: Ein Torus mit einer Riemannschen Metrik ohne konjugierte Punkte hat die Krümmung Null, ist also euklidisch. Einerseits brauchen nämlich auf dem Torus für eine Finsler-Metrik ohne konjugierte Punkte die Geodätischen keine Geraden zu sein und zum anderen gibt es viele wesentlich verschiedene Metriken mit denselben Geodätischen. Als Hauptergebnis gibt Verf. eine Kennzeichnung jener Kurvensysteme auf dem Torus (formuliert für die Ebene als universelle Überlagerungsfläche des Torus), die als Geodätische einer Metrik ohne konjugierte Punkte auftreten können. Schließlich wird durch Konstruktion eines Kurvensystems, in dem der Satz von Desargues nicht gilt, gezeigt, daß es Metrisierungen des Torus ohne konjugierte Punkte gibt, für welche eine einparametrische Bewegungsgruppe existiert und die Geodätischen keine geraden Linien sind. *W. Barthel.*

Ispas, C. I.: Identités de type Ricci dans l'espace de Finsler. Comun. Acad. Republ. popul. Române 2, 13—18, russ. und französ. Zusammenfassg. 17—18 (1952) [Rumänisch].

Die bekannten Vertauschungsformeln für die iterierten kovarianten Ableitungen gewisser differentialgeometrischer Größen eines Finslerschen Raumes werden hergeleitet. Die vorkommenden Ableitungen sind mit Hilfe der Cartanschen bzw. Berwaldschen Zusammenhangsobjekte gebildet. Durch Einführung des Tensors $R_{jkm}^{*i} = R_{jkm}^i - A_{js}^i R_{0km}^s$ hätte Verf. die gewonnenen Formeln in einer übersichtlichen Form schreiben können. *G. Soós.*

Ku; C. H. and Su Buchin: The first and second variations of the volume integral in a space with a multiple areal metric. J. Chinese math. Soc. 2, 231—242, englische Zusammenfassg. 243—245 (1953) [Chinesisch].

In an areal space S_n of an assigned m -dim. metric $V = \int F(x^k, p^i) du^1 \dots du^m$ ($p^i_x = \partial x^i / \partial u^x$; $i, j, k = 1, 2, \dots, m+n$) the authors define a class of affine connections Γ_{jk}^i by imposing two postulates: (1) the function F is invariant when the vectors p^i_x (x fixed) are parallelly transported by means of Γ 's; (2) $p^j_x \partial \Gamma_{jk}^i / \partial p^h_x = 0$. The first variation of the fundamental integral V is found as $\delta V = \int E_i \delta x^i du^1 \dots du^m$ with Eulerian vector E_i , so that the equations of the extremals S_m are given by $E_i = 0$. As a generalization of Davies' formula in Riemannian space, the second variation of V for S_m is computed in a concrete form.

Hu Hou-sung.

Su Buchin: Voluntary geometry of an affinely connected space with areal metric. J. Chinese math. Soc. 2, 246—253, engl. Zusammenfassg. 254—257 (1953) [Chinesisch].

In an areal space S_n the author attempted to give a voluntary connection Γ_{jk}^i instead of an affine connection Γ_{jk}^i and adopted Bortolotti's differential in the definition of parallel transports. As in the affine case, the second variation of the fundamental integral is computed in a voluntary-invariant form.

Hu Hou-sung.

Vrănceanu, G.: Réduction à une forme canonique d'une connexion linéaire de l'espace A_2 . Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti., Sect. şti. mat. fiz. 5, 481—483, russ. u. französ. Zusammenfassg. 483, 483—484 (1953) [Rumänisch].

Étant donné un espace A_2 à connexion affine, dont les coefficients de la connexion affine sont linéaires par rapport aux variables, $\Gamma_{jk}^i = A_{jkl}^i x^l + A_{jk}^i$ (A étant constantes) l'A. montre que, par une transformation linéaire, on peut réduire les coefficients: 1. Si $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2$ sont linéairement indépendants, les coefficients peuvent être amenés à l'une des formes $\Gamma_{11}^1 = \varepsilon x^1, \Gamma_{11}^2 = \pm x^1 + dx^2$ ($d = \text{const}$); $\Gamma_{11}^1 = \varepsilon x^1, \Gamma_{11}^2 = dx^2$ ($\varepsilon = \pm 1, d = \varepsilon$); $\Gamma_{11}^1 = \varepsilon x^1 - bx^2, \Gamma_{11}^2 = \varepsilon x^2$ ($\varepsilon = \pm 1, b = 0, 1$). 2. Si $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2$ ne sont pas linéairement indépendants, on peut les amener à l'une des formes: $\Gamma_{11}^1 = h, \Gamma_{11}^2 = x^1 - kx^2$ ($h = 0, 1; k = 1, -1, 0$); $\Gamma_{11}^1 = h, \Gamma_{11}^2 = \varepsilon x^2$ ($h = 0, 1; \varepsilon = \pm 1$); $\Gamma_{11}^1 = mx^1 - nx^2, \Gamma_{11}^2 = h$ ($m, n, h = 0, 1$; si $m = 0$, alors $n \neq 0$). 3. Si $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2$ sont constants, on peut les amener à être: $\Gamma_{11}^1 = 0, \Gamma_{11}^2 = \pm 1$ ou $\Gamma_{11}^1 = 1, \Gamma_{11}^2 = 0$ ou encore $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$.

M. Haimovici.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Valle Flores, Enrique: Eine Eigenschaft der Metrik von Busemann für die Teilräume in einem beliebigen metrischen Raum. Bol. Soc. mat. Mexicana 10, Nr. 1-2, 71—75 (1953) [Spanisch].

Mit $q_p(M, N) = \sup_{x \in R} [xM - xN] \cdot \exp(-px)$ als Abstand der Teilmengen M, N eines metrischen Raumes R ($px =$ Abstand der Punkte p, x und $xM =$ Abstand des Punktes x von M), wobei p ein fester Punkt von M ist (Busemannsche Metrik) wird gezeigt: Erfüllt eine Folge von Mengen die Cauchysche Konvergenzbedingung bzgl. q_p , so konvergiert die Folge topologisch.

G. Aumann.

Kirsch, A.: Die Pferchkugel eines Punkthaufens. Ein elementargeometrischer Beweis für den Satz von Jung im räumlichen Falle. Math.-Phys. Semesterber. 3, 214—217 (1953).

Verf. skizziert zunächst den von H. Rademacher und O. Toeplitz [Von Zahlen und Figuren, Berlin 1933, S. 83—89] für den ebenen Fall gegebenen Beweis des bekannten Jungschen Satzes, der in mehreren Schritten erfolgt. Bis auf den

letzten, der sich auf die Größe des Pferchkreises bezieht, sind alle diese Schritte auch im dreidimensionalen Falle ohne Mühe einzusehen. Eigentlich bewiesen wird nun, unter Voraussetzung der Ergebnisse im ebenen Falle, der Satz über die Größe der Pferchkugel. Verf. sagt selbst, daß man bei Fortsetzung dieser „Induktion nach der Dimensionszahl“ nicht mehr von „Elementargeometrie“ sprechen könnte.

F. Dueball.

Topologie:

Dinculeanu, Nicolae: Sur les limites généralisées. Acad. Republ. popul. Române, Bul. ști., Sect. Ști. mat. fiz. 5, 207—214, russ. und französ. Zusammenfassg. 213 (1953) [Rumänisch].

Soit E un ensemble et F un filtre sur E . Pour chaque espace topologique séparé E' et chaque $A \in F$, désignons par $C(A, E', F)$ l'ensemble des applications f de E dans E' tel que $f(A)$ soit compact. Si E est un ensemble filtrant et F le filtre des sections de E , R. Sikorski (ce Zbl. 42, 361) a défini pour les applications $f \in C(E, E', F)$ une limite généralisée ayant les propriétés de la limite usuelle. L'A. reprend les résultats de Sikorski, en introduisant une notion de limite généralisée à l'aide des ultrafiltres (N. Bourbaki, Eléments de Math., Topologie générale, chapitre 1, chapitre 3; ce Zbl. 26, 431, 27, 143; A. Weil, Intégration dans les groupes topologiques, Paris 1940). Soit \mathcal{U} un ultrafiltre plus fin que F et $f \in C(A, E', F)$. La trace de $f(\mathcal{U})$ sur $f(A)$ est une base d'ultrafiltre équivalente à $f(\mathcal{U})$. Puisque $f(A)$ est compact, $\lim_{\mathcal{U}} f$ existe. Cette limite est, par définition, „la limite généralisée de f suivant F “. On la désigne par $\lim_F f$ ou $\lim f$. Dans le théorème 1 l'A. retrouve les propriétés de la limite généralisée de Sikorski; le théorème 2 concerne les représentations d'un produit cartésien de groupes topologiques dans un groupe topologique abélien compact; les théorèmes 3 et 4 contiennent des applications des limites généralisées à la mesure de Haar sur les groupes compacts, avec des valeurs dans un corps topologique, autre que celui des nombres complexes. S. Marcus.

Albrecht, F.: Au sujet de l'espace des ensembles fermés. Comun. Acad. Republ. popul. Române 2, 209—212, russ. und französ. Zusammenfassg. 211—212 (1952) [Rumänisch].

Es seien E ein topologischer uniformisierbarer Raum und $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ zwei uniforme Strukturen von E , die in E gegebene Topologie induzieren. Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung gegeben, daß die entsprechenden uniformen Strukturen von $\mathfrak{K}(E)$ (s. folgendes Referat) die gleiche Topologie in diesem Raum induzieren.

I. Berstein.

Albrecht, Felix: Sur l'espace des ensembles fermés d'un espace compact. Comun. Acad. Republ. popul. Române 3, 13—17, russ. und französ. Zusammenfassg. 17 (1953) [Rumänisch].

Es sei E ein uniformisierbarer Hausdorffscher Raum und $\mathfrak{K}(E)$ der Raum der abgeschlossenen nicht-leeren Mengen von E . Der Raum E ist dann und nur dann kompakt und zusammenhängend (bzw. kompakt und lokal-zusammenhängend), wenn $\mathfrak{K}(E)$ die gleichen Eigenschaften besitzt.

I. Berstein.

Albrecht, Felix: Deux théorèmes sur l'espace des ensembles fermés. Comun. Acad. Republ. popul. Române 3, 193—196, russ. und französ. Zusammenfassg. 196 (1953) [Rumänisch].

Es seien E und E' zwei kompakte Räume. Sind E und E' einander quasi-homöomorph, so sind auch $\mathfrak{K}(E)$ und $\mathfrak{K}(E')$ (s. vorstehendes Referat) einander quasi-homöomorph. Der Raum $\mathcal{H}(\mathfrak{K}(E_\alpha))$ ist ein Retrakt von $\mathfrak{K}(\mathcal{H}(E_\alpha))$ wobei die E_α beliebig viele kompakte Räume sind.

I. Berstein.

Ganea, Tudor: Sur la catégorie uni-dimensionnelle. Acad. Republ. popul. Române, Bul. ști. Sect. Ști. mat. fiz. 5, 127—133, russ. und französ. Zusammenfassung 133 (1953) [Rumänisch].

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind in einer anderen Arbeit des Verf. (vgl. dies. Zbl. 71, 166) enthalten.
I. Berstein.

Kapušano, Isaac: Sur une proposition de M. Bing. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 2648—2649 (1953).

Gegen die Bingsche Konstruktion (R. H. Bing, this Zbl. 35, 391) des beschränkten, nicht ausgearteten, homogenen Kontinuums, die eine verneinende Antwort zu einer Frage von Knaster und Kuratowski [Problème 2, Fundamenta Math. 1, 223 (1920)] bildet, macht Verf. einen Einwand, indem er die Unvereinbarkeit seiner Resultate mit den Bingschen angibt. Die Unvereinbarkeit scheint darauf zu beruhen, daß jedes Glied einer Kette bei der Definition des Verf. zusammenhängend, und zwar ein einfach zusammenhängendes Gebiet, sein soll, während es bei Bing aus theoretischen Gründen nicht notwendigerweise als zusammenhängend angenommen wird, obwohl es bei der Definition des Bingschen Kontinuums M tatsächlich genügt, die Ketten von zusammenhängenden Gebieten allein zu gebrauchen. Der Einwand des Verf. gegen Bing ist deshalb unzutreffend.
H. Terasaka.

Kapušano, Isaac: Sur les continus linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 683—685 (1953).

Fortsetzung der vorangehenden Note. Enthält noch dasselbe Mißverständnis.
H. Terasaka.

Keldyš, L. V.: Monotone Abbildungen des Würfels. Trudy mat. Inst. Steklov. Nr. 38, 72—76 (1951) [Russisch].

The paper is dealing with continuous decompositions (or monotone mappings) of spaces. The content of this Note is to be compared with the content of the last results of the author on similar topics (s. Keldyš, this Zbl. 77, 362). There is no dimension-raising monotone mapping of the square C_2 (cf. G. T. Whyburn, Analytic Topology, New York 1942, p. 72). On the contrary, there exists a one-dimensional continuum S and a monotone mapping f of S such that $\dim fS > 1$ (Každan, this Zbl. 29, 323; Vajnštejn, this Zbl. 35, 385). In this paper the author shows that for $n > 2$ there exists a monotone mapping f of the cube C_n of n dimensions such that $\dim fC_n$ might be any positive integer or ∞ . She starts by constructing a monotone irreducible mapping f of C_3 such that fC_3 be a compact of dimension \aleph_0 and that for every open set G in C_3 the image $fG = Y$ contains, topologically, the Hilbert parallelepipedon and a cube C_q for every $q > 0$. Definitions: A mapping f of a space A onto a space B is monotone, provided for every $y \in B$ the set $f^{-1}y$ is a continuum: f is reducible, provided for no closed set $F \neq \emptyset \neq A = B$.
G. Kurepa.

Wallace, A. D.: Cohomology, dimension and mobs. Summa Brasil. Math. 3, 43—54 (1953).

Let S be a mob, that is, a topological Hausdorff semigroup. Let E be the set of idempotents of S , P the set $\{a; a \in S, aS = S\}$. Theorem 1. Let S be compact. Then P is a closed submob of S , and if $a \in P$, $x, y \in S$, and $ax = ay$, then $x = y$. The set $E \cap P$ is the set of left units of S . The submob P is the direct product of $E \cap P$ and the group $G(e)$, where $G(e)$ is the largest group containing e and $e \in E \cap P$. Theorem 2. Let S be a compact connected mob with left unit. If T is a closed ideal of S and Q is a closed subset of T , then the natural homomorphism $H^n(S, Q) \rightarrow H^n(T, Q)$ is an isomorphism onto for $n > 0$ (H^n is the n -dimensional cohomology group). This theorem has various interesting corollaries. For example, an n -sphere is a mob with unit if and only if $n = 0, 1$, or 3 , and then it is a group. If an n -cell is a mob with unit u , then $H(n)$ is contained in the $(n-1)$ -sphere that bounds the n -cell. A classical manifold is a mob with unit if and only if it is a group. A number of

other results are obtained, among them a condition that the smallest ideal of a compact connected mob be a group. *E. Hewitt.*

Pavel, Monica: Les classes d'homotopie des transformations également continues. *Comun. Acad. Republ. popul. Române* 3, 115—116, russ. und französ. Zusammenfassung 116 (1953) [Rumänisch].

Es sei F eine Menge gleichgradig stetiger Abbildungen eines metrischen kompakten Raumes in einen kompakten ANR. Die Abbildungen von F verteilen sich dann in nur endlich viele Homotopieklassen. *T. Ganea.*

● **Whitehead, George W.: Homotopy theory.** Compiled by **Robert J. Aumann.** Mathematics Department of the Massachusetts Institute of Technology 1953. 170 p. \$ 3.50.

Diese Vorlesungen sind in drei Kapitel eingeteilt. Das erste betrifft die allgemeinen Definitionen und Sätze über Homotopiegruppen: 1. Abbildungsräume. 2. Wege- und Fundamentalgruppe. 3. Gruppenähnliche Räume. 4. Homotopiegruppen. 5. Die Operatoren von π_1 auf π_n . 6. Relative Homotopiegruppen. 7. Das Bündel $\pi_n(X, A)$. Das zweite Kapitel behandelt den Zusammenhang zwischen singulärer kubischer Homologietheorie und Homotopie: 1. Das Homotopie-Homologie-Diagramm. 2. Über $\pi_n(S^n)$. 3. Die Eilenberg-Blakers-Gruppen. 4. Der „Homotopy addition“ Satz. 5. Der Satz von Hurewicz. 6. CW-Komplexe. 7. Hindernistheorie. 8. Erweiterungs- und Klassifikationssätze. 9. Einige Identifizierungsräume. 10. Eilenberg-MacLanesche Räume. Das dritte Kapitel behandelt die Theorie der gefaserten Räume im Sinne von Serre (s. dies. Zbl. 45, 260): 1. Definitionen und Beispiele. 2. Die Homotopiefolge eines gefaserten Raumes. 3. Das Bündel von Gruppen $H_q(F; G)$. 4. Die Filtration der Kettengruppen von X : die spektrale Folge. 5. Berechnung von $E_1(G)$ und $E_2(G)$. 6. Relative Homologie in gefaserten Räumen. 7. Einige Anwendungen spektraler Folgen. 8. Anwendungen auf Sphären. 9. Einige Faserungen. 10. Die spektrale Folge für Kohomologie. Die Vorlesungen setzen gewisse Kenntnisse aus dem Gebiete der Homologie voraus, am besten wie sie im Buche von Eilenberg und Steenrod (*Foundations of algebraic topology*, s. dies. Zbl. 47, 414) dargestellt sind. Im übrigen sind fast alle Beweise vollständig, so daß diese Vorlesungen eine ausgezeichnete Darstellung der heutigen Homotopietheorie bieten. *T. Ganea.*

Barratt, M. G. and P. J. Hilton: On join operations in homotopy groups. *Proc. London math. Soc.*, III. Ser. 3, 430—445 (1953).

Verff. betrachten folgende Operationen in den Homotopiegruppen der Sphären: Einhängung, „join“, reduzierter „join“, Whitehead-Produkt und Zusammensetzung. Es werden mehrere Relationen zwischen diesen Operationen bewiesen, die insbesondere zeigen, daß sich „join“ und reduzierter „join“ durch Einhängung und Zusammensetzung ausdrücken lassen. Als Anwendung werden einige spezielle Whitehead-Produkte untersucht und ein Satz über verallgemeinerte Hopfsche Invarianten bewiesen. *D. Puppe.*

Adem, José: The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology. *Bol. Soc. mat. Mexicana* 10, Nr. 1/2, 1—11 (1953) [Spanisch].

Traduction espagnole d'un article de même titre (cf. ce Zbl. 48, 170). *G. Hirsch.*

Weyl, Hermann: Über die kombinatorische und kontinuumsmäßige Definition der Überschneidungszahl zweier geschlossener Kurven auf einer Fläche. *Z. angew. Math. Phys.* 4, 471—492 (1953).

Die Arbeit kann weitgehend als Zwischenstufe auf dem Weg von der 2. (Leipzig 1923) zur 3. Auflage (Stuttgart 1955) des berühmten Buches „Die Idee der Riemannschen Fläche“ des Verf. angesehen werden (vgl. dazu auch das Vorwort der letzteren). Die topologischen Betrachtungen jener sind wesentlich kombinatorisch und gründen sich auf eine Triangulierung der gegebenen Fläche, in dieser dagegen ist konsequent der mengentheoretische Standpunkt eingenommen, und die Über-

deckung der Fläche durch ein System von Umgebungen spielt eine Hauptrolle. Die gegenwärtige Arbeit, an den Anhang der 2. Aufl. anknüpfend, behandelt zunächst sorgfältig gerade die kombinatorische Gewinnung der Überschneidungszahl zweier stetiger geschlossener Wege auf einer (orientierbaren) Fläche, indem zuerst α als geschlossener Kantenzug (Zykel), β als geschlossener Kokantenzug (Kozykel) vorausgesetzt wird; beliebige Wege werden durch einen geeigneten Deformationsprozeß mit Erhaltung der (wie früher „algebraisch“ eingeführten) „Integralfunktionen“ (Homologie) darauf zurückgeführt. Für geschlossene Flächen vom Zusammenhangsgrad h (= Maximal-Zahl der kohomolog unabhängigen Integralfunktionen) kommt man schließlich zur Darstellung der Schnitzzahl $\chi(\alpha, \beta)$ durch die Charakteristikenform $ch(\beta, \alpha) = y S x$, wo $\alpha \sim \sum_1^h x_v \gamma_v$, $\beta \sim \sum_1^h y_v \gamma_v$ bei passender Wegbasis (γ_v) : x_v, y_v ganz, S aus $\frac{1}{2} h$ längs der Hauptdiagonale aufgereihten Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aufgebaut. Zum Nachweis der Unabhängigkeit von der Wahl der Triangulierung werden zunächst Unterteilungen betrachtet, dann aber wird zu einer auf eine Triangulierung nicht mehr Bezug nehmenden neuen Definitionen übergegangen; diese beruht auf einer Einteilung der Kurve α in Teilstücke α_j , deren jedes einer Umgebung eines Kurvenpunktes in einer Überdeckung der Fläche angehört. In der Kreisabbildung dieser Umgebung wird der Winkel betrachtet, unter dem der Bogen α_j von den Punkten von β aus erscheint, und seine Änderung beim Durchgang durch α_j liefert den betreffenden Beitrag zur Charakteristik. Zum Schluß wird angegeben, welche Schritte zum Beweis der Gleichheit der beiden Definitionen durchzuführen sind; dies führt dann auch zum Nachweis der Unabhängigkeit der 1. Definition von der Triangulierung, der 2. von der Wahl der Überdeckung, der lokalen topologischen Kreisabbildungen und der Einteilung der Kurve. Dieses Wechselspiel wird nun in der 3. Auflage des Buches wieder aufgegeben, unter Beschränkung auf (orientierbare) glatte Flächen wird vielmehr die gesamte Theorie der Schnitzzahl, einschließlich Charakteristikenform, auf die 2. Definition gegründet, wobei jetzt wieder mit Differentialen und ihren (sinngemäß zu erklärenden) Integralen über stetige Kurven gearbeitet werden kann (an Stelle der abstrakt eingeführten „Integralfunktionen“), so daß man jetzt erst endgültig bei der entgegengesetzten der beiden Betrachtungsweisen angelangt ist.

Hermann Schmidt (Würzburg).

Theoretische Physik.

● Duncan, W. J.: Physical similarity and dimensional analysis: an elementary treatise. London: Edward Arnold and Co. 1953 VII, 156 p. 30 s.

● Focken, C. M.: Dimensional method and their applications. London: Edward Arnold & Co. 1953. 232 p. 30 s net.

Brejtnan, V. M.: Zur Theorie der Integralähnlichkeit. Žurn. techn. Fiz. 23, 1269—1286 (1953) [Russisch].

In der Arbeit wird ein „Kriterium für die Möglichkeit der Ähnlichkeit“ eingeführt. Wenn für ein System der Charakteristiken zweier Erscheinungen dieses Kriterium gleich Eins ist, so ist eine „proportionale“ Ähnlichkeit der betrachteten Erscheinungen möglich (normierte Charakteristiken). Die Nichterfüllung der genannten Bedingung erfordert dagegen eine Transformation der Systeme der ursprünglichen nichtnormierten Charakteristiken durch Einführung neuer, normierter Charakteristiken, die die Integrale der nichtnormierten Charakteristiken längs der Achsen ihrer Argumente sind. Die neuen Gleichungen geben die Möglichkeit, Ähnlichkeitsinvarianten zu erhalten, die teils gewöhnliche, endliche Invarianten, teils Integralinvarianten — Verallgemeinerungen der endlichen (algebraischen) Invarianten — darstellen. Es werden Beispiele für die Anwendung der Methode der Integralähnlichkeit auf einige Aufgaben der Physik und der physikalischen Chemie

(Änderung der Konzentration der Komponente in unbeweglichem Medium und in der Strömung im Ergebnis des Diffusions- und des chemischen Prozesses, Bewegung einer zähen Flüssigkeit, Dynamik eines Körpers von veränderlicher Masse) angeführt.

L. D. B. (Übersetzt aus Ref. Žurn. Fiz. 1955, Nr. 16214).

Mechanik:

• Mises, Richard von and Theodore von Kármán (edited by): *Advances in applied mechanics*. Vol. 3. New York: Academic Press, Inc.; London: Academic Books, Ltd. 1953. X, 324 p. \$ 9,—.

Aržanych, I. S.: Über einen Satz vom Hamilton-Jacobischen Typus. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 463—466 (1953) [Russisch].

Verf. betrachtet dynamische Systeme, die sich unter der Wirkung von Kräften bewegen, welche noch von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten abhängen. Die Bewegungsgleichungen $d(\partial L/\partial \dot{q}_r)/dt - \partial L/\partial q_r = Q_r(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ ($r = 1, \dots, n$) lassen sich bei $\partial(Q_1, \dots, Q_n)/\partial(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \neq 0$ in die kanonische Form (1) $\dot{q}_r = \partial H/\partial p_r$, $\dot{p}_r = \tilde{Q}_r - \partial H/\partial q_r$ überführen, wobei $H = L + \sum_{r=1}^n p_r \dot{q}_r$, $\tilde{Q}_r = Q_r(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n})$. Es wird folgender Satz bewiesen: „Durch Elimination der verallgemeinerten Impulse p_r ($r = 1, \dots, n$) (Widerstandskräfte, gyroscopische Reaktionskräfte u. a.) aus $H = r$, $\tilde{Q}_r = \partial v/\partial q_r$ ($r = 1, \dots, n$) erhalte man die partielle Differentialgleichung $F(q_1, \dots, q_n, \partial v/\partial q_1, \dots, \partial v/\partial q_n) = 0$ mit totalem Integral $v(q_1, \dots, q_n, c_1, \dots, c_n)$, wobei

$$(2) \quad (\tilde{Q}_v, \tilde{Q}_\mu) + \sum_{\lambda=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{Q}_v}{\partial p_\lambda} \frac{\partial^2 v}{\partial q_\mu \partial q_\lambda} - \frac{\partial \tilde{Q}_\mu}{\partial p_\lambda} \frac{\partial^2 v}{\partial q_v \partial q_\lambda} \right) = 0$$

gelte. Indem man aus der Gleichung $\tilde{Q}_r = \partial v/\partial q_r$ die Impulse berechnet, stellt man die Differentialform $\omega(d) = \sum_{r=1}^n p_r dq_r$ auf. Diese ist ein totales Differential ($\omega = dw$).

Die Relationen $p_r = \partial w/\partial \dot{q}_r$ ($r = 1, \dots, n$) sind Integrale der Differentialgleichungssysteme (1); die übrigen Integrale lassen sich durch Integration der Gleichungen $d(\partial w/\partial \dot{c}_r)/dt = \partial v/\partial c_r$ ($r = 1, \dots, n$) ermitteln. Nach dem Beweise des Satzes weist Verf. auf hinreichende Bedingungen hin, bei welchen (2) erfüllt ist. Es werden zwei elementare Beispiele angeführt, welche auf Grund des bewiesenen Satzes gelöst werden.

B. Dolaptschiew—B. Sendow.

Rund, Hanno: Application des méthodes de la géométrie généralisée à la dynamique théorique. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. 52, 41—51 (1953).

L'A. fonde une axiomatique de la mécanique analytique en utilisant le langage et les ressources de la géométrie des espaces de Finsler. À côté des considérations classiques relatives à la théorie de Hamilton-Jacobi l'A. étudie également les systèmes non holonomes, considérant, dans ce cas, „le principe de moindre courbure, comme le plus fondamental“.

G. Reeb.

Egger, Hans: Querschwingungen von Trägern mit Feder und Zusatzmasse. Österreich. Ingenieur-Arch. 7, 188—214 (1953).

Es werden die Eigen- und erzwungenen Schwingungen eines Systems untersucht, das aus einem beliebig gelagerten Träger konstanten Querschnittes und einer an einem seiner Punkte federnd aufgehängten Zusatzmasse besteht. Die Differentialgleichung der Bewegung wird mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen aus den Ausdrücken für die kinetische und potentielle Energie des Systems gefunden. Für den Fall des Kragträgers (Zusatzmasse am Ende des Trägers) und des beidseitig aufliegenden Trägers (Zusatzmasse in Trägermitte) werden die Frequenzgleichungen aufgestellt und die Eigenschwingungszahlen numerisch ermittelt. Für beide Träger-

arten wird je eine Näherungsgleichung für die Berechnung der Grundschnitzungszahl abgeleitet. Schließlich werden die erzwungenen Schwingungen des Trägers eingehend untersucht. Diese Ergebnisse sind für die dynamische Dämpfung erzwungener Schwingungen (Schwingungsdämpfer) von Bedeutung. *B. Dizioğlu.*

Efimov, M. I.: Zu den Čaplygin'schen Gleichungen anholonomer mechanischer Systeme. Priklad. Mat. Mech. **17**, 748—750 (1953) [Russisch].

Es wird ein starrer Körper, ein sogenannter „Schlitten“ betrachtet, der sich auf einer Horizontalebene bewegt und sich auf dieser mit zwei Füßen, welche frei gleiten können, stützt, wobei der dritte ein Rädchen mit vollkommen scharfem Rande ist. Verf. gibt die Lösung des Problems der Bewegung des „Schlittens“ und unterstreicht das Übersetzen von Čaplygin, welcher, bei Gelegenheit der auf dieses Problem gemachten Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen unter der Form, die er für den Fall mechanischer Systeme mit nichtholonomen Bindungen abgeleitet hat (S. A. Čaplygin, Über die Bewegung eines schweren Rotationskörpers auf einer Horizontalebene, Werke, B. I, S. 159—170 u. S. 207—215, Verlag der Akademie der Wissenschaften der Sowjet-Union, 1933), als eine der Koordinaten die vom Mittelpunkt des Rädchens durchlaufene Strecke benützt hat. Das vom Verf. erhaltene Ergebnis schließt jenes von C. Carathéodory festgestellte ein (vgl. dies. Zbl. **6**, 373).

D. J. Mangeron.

Eraslan, Necdet: Sur la détermination de la résultante des forces d'inertie agissant sur la bielle d'un système „Bielle-Manivelle“. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A **18**, 188—197 (1953).

Es wird die Trägheitspolkurve des zentrischen Geradeschubkurbelgetriebes behandelt. — Für die in Kollennmaschinen vorkommenden Abmessungen dieser Getriebe läßt sich die Trägheitspolkurve durch zwei Ellipsenbögen gut approximieren. Hierzu wird ein grapho-analytisches Verfahren angegeben. *B. Dizioğlu.*

Linnik, Ju. V. und V. S. Novoselov: Zufällige Störungen der regulären Präzession eines Kreiseis. Priklad. Mat. Mech. **17**, 361—368 (1953) [Russisch].

Let $dx_i/dt = X_i[x_j, A_k(t), t] + S_i[x_j, A_k(t), t]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ (*) be a system of differential equations, where $A_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, l$ characterize an l -dimensional stochastic process. Denote by $a_k(t)$ the mathematical expectation of $A_k(t)$ and put $A_k(t) = a_k(t) + b_k(t)$, so that the mathematical expectation of $b_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, l$, is zero. $S(x_j, A_k(t), t) = \{S_i[x_j, A_k(t), t], i = 1, 2, \dots, n\}$ is an n -dimensional random vector-function which for given values of the arguments characterizes an n -dimensional stochastic process. It is supposed that the initial data of (*) are random variables and are given by means of a distribution with probability density $P\{\xi_i^0 \leq x, y_i^0 \leq \xi_i^0 \leq d\xi_i^0\} = f(\xi_1^0, \dots, \xi_n^0) d\xi^0$, $d\xi^0 = d\xi_1^0 d\xi_2^0 \dots d\xi_n^0$, $i = 1, 2, \dots, n$; y_i^0 is the mathematical expectation of x_i^0 . The solution of (*) is an n -dimensional stochastic process $x(t) = \{x_i(t)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. The paper has two parts; the first one deals with the distribution of the n -dimensional process of the deviations of the solution of (*) from $y_i(t)$, where $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ is the solution of (*) for which $x_i^0 = y_i^0$, $A_k(t) = a_k(t)$, $S_i[x_j, A_k(t), t] = 0$. The second part is devoted to the deviation of the motion of a gyroscope from the regular precession. Let θ be the angle of nutation, ψ the angle of precession, φ the angle of the proper rotation of a gyroscope. The Lagrange's equations for a gyroscope subjected to the action of random forces are the following (**): $\ddot{\theta} = \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - (C/A)(\dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta)\dot{\psi} \sin \theta + (mg l/A) \sin \theta + M_\theta/A$, $\ddot{\psi} = (C/(\dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta)) \cos \theta - 2A \cos \theta \dot{\varphi} \dot{\psi} + A \sin \theta + M_\psi/A \sin^2 \theta$, $d(\dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta) dt = M_\varphi/C$, where A and C are the moments of inertia of a gyroscope, M_θ , M_ψ and M_φ random functions depending only of $\theta, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}, t$; m is the mass of the gyroscope, l the distance of the centre of gravity from a fixed point. The system (**) has a unique solution $\theta = \theta_0, \dot{\psi} = \dot{\psi}_0, \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ for initial data $\theta_0, \dot{\theta}_0 = 0, \dot{\psi}_0, \dot{\varphi}_0$ verifying the following condition (***) $(A - C)\dot{\psi}_0 \cos \theta_0 - C\dot{\varphi}_0 \eta_0 + mg l = 0$ and $M_\theta = M_\psi = M_\varphi = 0$; this solution is called to be the regular precession of the gyroscope (the case $\sin \theta_0 = 0$ is not considered). Let $A = A + b_1$, $C = C + b_2$, $m l = (m l) + b_3$ be the characteristics of the gyroscope, where b_i are independent Gaussian random variables; for $t = 0$ the initial data are independent random variables and their values are $\theta_0 + z_1^0, \dot{\theta}_0 + z_2^0, \dot{\psi}_0 + z_3^0, \dot{\varphi}_0 + z_4^0$, where z_i^0 are independent Gaussian random variables. Suppose the condition (***) to be verified for the mean values $A, C, m l$, and $M_\varphi = 0$. Using the results given in the first part, the author obtains the probability density of the deviations of the mo-

tion of a gyroscope from the regular precession under the form $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = [2^n \pi^n D(J)]^{-1/2} \exp \{[-1/2 D(J)] \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \xi_i \xi_j\}$, where $D(J)$ is the determinant of some correlation matrix and A_{ij} its cofactors.

R. Theodorescu.

Mathieu, P.: Über die Berechnung der Hypoidgetriebe. II. Ingenieur-Arch. **21**, 287—291 (1953).

In der ersten Mitteilung Ingenieur-Arch. **21**, 55—62 (1953) gab Verf. eine neue Berechnungsgrundlage für Hypoidgetriebe von zwei sich rechtwinklig kreuzenden Achsen. In dieser Mitteilung wird nun diese Theorie auf den Fall beliebiger windschiefer Achsen ausgedehnt. Es wird die eine Zahnflanke, z. B. die des Tellerrades angenommen und die mit dieser im Eingriff stehende Ritzelflanke als Hüllfläche der bewegten Tellerradflanke analytisch bestimmt. Mit einer Bemerkung zur numerischen Berechnung der Gegenflanke schließt die Arbeit.

B. Diziöglu.

Schmid, Wilhelm: Über die Erzeugung einer Koppelkurve aus neun Bestimmungsstücken. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden **2**, 427—431 (1953)

Die Ermittlung eines Gelenkvierecks, das eine durch neun Bestimmungsstücke gegebene Koppelkurve als Bahnkurve erzeugt, bildet eine der Hauptaufgaben der Getriebelehre. Diese Aufgabe wird für die vorgeschriebenen neun linearen Bestimmungsstücke gelöst. — Zuerst werden die geometrischen Grundlagen für die Lösung der gestellten Aufgabe zusammengestellt und insbesondere durch Abzählung die Bestimmungsstücke einer Koppelkurve und des Büschels von Koppelkurven erörtert. $D_{1,2,3}$ seien die drei Doppelpunkte und $F_{1,2,3}$ die singulären Brennpunkte der Koppelkurve. P, Q, R sind Punkte der festen Ebene. Mit P^*, Q^* sollen die isogonal Inversen von P, Q bezeichnet werden. Verf. gibt Konstruktionen des erzeugenden Gelenkvierecks einer Koppelkurve, von der die folgenden Bestimmungsstücke bekannt sind: a) $F_{1,2,3}$ und P, P^* ; b) $D_{1,2,3}$ und P, Q, R ; c) $D_{1,2,3}$ und P, Q, F_3 . — Es ist möglich, daß von den drei endlichen Doppelpunkten einer gegebenen reellen Koppelkurve nur einer reell ist, während die beiden anderen konjugiert komplex sind. Verf. gibt für diesen Fall die zeichnerische Bestimmung der isogonalen Inversion des Doppelpunktdreiecks.

B. Diziöglu.

Sestini, Giorgio: Sulla regolarità dei moti unidimensionali di un mezzo continuo disgregato. Rivista Mat. Univ. Parma **4**, 241—254 (1953).

Oggetto del lavoro è la discussione della regolarità dei moti per sola gravitazione di un mezzo continuo disgregato che si possono far dipendere da una sola coordinata spaziale (moti piani, sferici e cilindrici).

G. Lampariello.

Slonjanskij, G. A.: Über die Integration der Bewegungsgleichungen eines symmetrischen, astatischen Kreisels. Priklad. Mat. Mech. **17**, 411—422 (1953) [Russisch].

Die Bewegungsgleichungen eines symmetrischen, kardanisch aufgehängten Kreisels werden für drei Fälle integriert. Dabei wird ein der kardanischen Aufhängung angepaßtes Bezugssystem verwendet, jedoch werden die Trägheitswirkungen der Kardanringe vernachlässigt. Behandelt wird 1. der kräftefreie Kiesel, 2. Einwirkung eines konstanten äußeren Momentes um die innere Kardanachse, 3. Einwirkung eines dem Drehwinkel um die innere Kardanachse proportionalen Momentes um dieselbe Achse. Sofern strenge Lösungen der angegebenen drei Probleme nicht möglich sind, werden Näherungslösungen angegeben, die sich entweder auf den Fall „kleiner Winkelauslenkungen“ oder den Fall eines „schnellaufenden Kreisels“ beziehen. Wegen der Vernachlässigung der Trägheitswirkungen der Kardanringe dürften die ausgerechneten Ergebnisse insbesondere bei schrägstehendem inneren Kardanring nur mit Vorsicht zu gebrauchen sein.

K. Magnus.

Vernić, Radovan: Periodische Lösungen im Dreikörperproblem. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. **8**, 247—264 und kroatische Zusammenfassung, 265—266 (1953).

Es wird das allgemeine Integral der regularisierten Virialgleichung des Dreikörperproblems angegeben und die Randwertaufgabe der Periodizität formuliert, wobei die Lagrangeschen exakten Lösungen des allgemeinen Dreikörperproblems dem Fall der vollständigen linearen Differentialgleichung entsprechen. Anschließend wird die Integration des Zweikörperproblems mittels einer Greenschen Funktion geleistet. Die Randwertaufgabe der Periodizität führt auf die Stoßbahn als partikuläres Integral. Verf. behauptet, daß die periodischen Lösungen des Dreikörperproblems unter den periodischen Lösungen des Virialsatzes enthalten seien und gelangt zum Schlußsatz, der in schroffem Gegensatz zur üblichen Meinung steht: die einzigen periodischen Lösungen des allgemeinen Dreikörperproblems seien die Lagrangeschen exakten Lösungen. Im übrigen fußt die Arbeit in ihren Grundlagen vollständig auf dem Buch des Verf.: Diskussion der Sundman'schen Lösung des Dreikörperproblems, (dies. Zbl. 57, 161), zu dessen Kritik jetzt Lense [S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1956, 237–242 (1957)] zu vergleichen ist.

Th. Schmidt.

Thiruvengkatachar, V. R. and N. S. Venkatesan: On the internal ballistics of leaking guns. *Proc. nat. Inst. Sci. India* 19, 829–837 (1953).

The equations of the interior ballistics of leaking guns are integrated by a method of successive approximations and the solution is worked out to terms of the first order. The application of the method to a particular example gives results in satisfactory agreement with those obtained by more accurate and elaborate methods.

Zusammenfassg. des Autors.

Elastizität. Plastizität:

• **Wang, Chi-Teh:** Applied elasticity. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Co., 1953. IX, 357 pp. \$ 8,00.

Németi, Ladislau: Tensions thermiques dans des tubes aux parois minces dans le cas d'un champ thermique symétrique par rapport à l'axe. *Acad. Republ. popul. Române, Fil. Cluj, Studii Cerc. şti.* 4, Nr. 1 2, 64–71, russ. und französ. Zusammenfassg. 72 (1953) [Rumänisch].

Si studiano le tensioni termiche in un tubo lungo ricevente il calore dall'esterno, allorchè la temperatura dell'ambiente interno resta costante ed il coefficiente di trasmissione del calore alla superficie interiore della parete è variabile lungo il tubo stesso. Il campo termico si schematizza in un problema di simmetria assiale dato dall'equazione $t_{xx} + t_{zz} + t_r/r = 0$ con certe condizioni alla frontiera ed alle estremità del tubo. La soluzione data non costituisce però come l'osserva l'A. stesso che una prima approssimazione.

D. J. Mangeron

Ionescu, D. V. et L. Németi: L'intégration d'une équation aux dérivées partielles qui intervient dans le problème du calcul des tensions thermiques dans les tubes bouillleurs des chaudières au passage forcé et des chaudières à radiation. *Acad. Republ. popul. Române, Fil. Cluj, Studii Cerc. şti.* 4, Nr. 1 2, 73–77, russ. und französ. Zusammenfassg. 77–78 (1953) [Rumänisch].

Gli AA. riducono — tramite metodo Fourier — il problema schematizzato nel resoconto precedente alla risoluzione di un sistema algebrico lineare infinito di equazioni. Si sottolinea in fine la necessità di studiare ulteriormente il problema di convergenza di certe serie che ne derivano.

D. J. Mangeron.

Payne, L. E.: On axially symmetric punch, crack and torsion problems. *J. Soc. industr. appl. Math.* 1, 53–71 (1953).

This paper deals with familiar problems of elasticity but by methods which reduce considerably the amount of work involved. Solutions of some of these problems have previously been obtained from biharmonic functions satisfying certain prescribed boundary conditions, although Green (this Zbl. 33, 27) has reduced the Boussinesq problem and the crack problem to the determination of a potential function whose first and second normal derivatives are prescribed on each portion of the shear-free plane. The author, using a method suggested by the work of Green, introduces oblate spheroidal and toroidal coordinates and by means of Mehler's integral expansion obtains solutions of the following problems: (i) the spherical punch problem; (ii) the oblate spheroidal punch problem; (iii) the Boussinesq problem with uniform,

oblate spheroidal or paraboloidal pressure distributions; (iv) the crack problem with pressure of displacement prescribed. The paper concludes with certain torsion problem analogues. *R. Gran Olsson.*

Ambareumjan, S. A.: Zur Frage der Berechnung der Stabilität dünnwandiger Stäbe. Akad. Nauk Armjan. SSR. Doklady 17, 9—14 (1953) [Russisch].

The author presents a method of estimating the stability of thin-walled prismatic rods with open cross-sections subjected to uniform axial pressure. The prismatic rod is supposed to be a cylindrical shell, the middle surface of which has breaches on the generating lines coinciding with coordinate lines. Following A. G. Nazarov's conceptions the main curvature of the middle surface is equal to the sum of two curvatures. Assuming that the rod, under the action of shearing force, performs buckling semi-waves, the solution of the partial differential equation governing the problem, is supposed to have the form of sine-functions satisfying boundary conditions. Thus, the problem is reduced to ordinary differential equations of the 4th order. In conclusion, the author remarks that the proposed method can also be used in the case of thinwalled prismatic rods with closed cross-sections. *D. Raškorič.*

Ambareumjan, S. A.: Zur Frage der Berechnung geschichteter, anisotroper Schalen. Akad. Nauk. Armjan. SSR. Izvestija. fiz.-mat. estest. techn. Nauki 6. Nr. 3, 15—35 (1953) [Russisch].

Die Gleichgewichtsgleichungen einer aus mehreren homogenen und orthotropen Schichten zusammengesetzten dünnen Schale werden unter den üblichen kinematischen Voraussetzungen hergeleitet. Drei Spezialfälle: Die Rotationsfläche mit achsensymmetrischer Belastung und Randbedingungen, die abschüssige Schale mit vertikaler Belastung, und die Platte mit normaler Belastung werden mit Hilfe üblich geeigneter Spannungsfunktion näher untersucht. *S. Drobot.*

Bodaszewski, Stanislaw: On the asymmetric state of stress and its applications to the mechanics of continuous mediums. Arch. Mech. stosow. 5, 351—392, russ. und engl. Zusammenfassg. 392—396 (1953) [Polnisch].

Verf. baut seine Theorie des unsymmetrischen Spannungszustandes auf der Voraussetzung auf, daß im Spannungstensor die Ungleichheit $\tau_{jk} \neq \tau_{kj}$ ($i, k = 1, 2, 3, \dots$) gilt. Dann setzt er $\tau_{jk} - \tau_{kj} = 2\theta_i = 0$ voraus. Der Spannungsunterschied $2\theta_i$ stellt ein Moment der Tangentialkräfte dar, die auf entsprechende Seitenflächen des Elementarwürfels wirken. Der Überschuß dieses Momentes muß dann in der vorliegenden Theorie den Charakter eines zusätzlichen inneren Einheitsdipolmomentes D_{jk} haben, welches folgende Gleichung erfüllen soll: $(D_{jk} - D_{kj}) + (\tau_{jk} - \tau_{kj}) = 0$. Der Spannungsunterschied θ muß dann nach dem Boltzmannschen Axiom die Bedingung $|\theta| = 0$ erfüllen, so daß vorausgesetzt wird, daß im Gleichgewichtszustand des Körpers dieser Unterschied gleich Null ist. Umgekehrt würde jeder Zustand, der sich mit $\text{Mod } \theta > 0$ charakterisieren läßt, einen Zustand zerstörten inneren Gleichgewichts bedeuten. Diese Tatsache wird als Grundaxiom der neuen Theorie betrachtet, da es sich nicht direkt beweisen läßt, ebenso wie es beim Boltzmannschen Axiom der Fall ist. Diese Theorie setzt also voraus, daß in jenen Orten, wo das innere Gleichgewicht eines elastischen unsymmetrischen Körpers zerstört worden ist, ein unsymmetrischer Spannungszustand mit einem nichtverschwindenden inneren Dipolmoment D erscheint. Zum Berechnen des Spannungsunterschiedes θ oder des elementaren Dipolmomentes D , bedient sich Verf. zweier Methoden. a) Die kinetische Methode, sich auf dem Gesetz des Impulsmomentes gründend, worin der Vektor \bar{K} als ein elastischer Impuls bezeichnet wird: $\bar{\theta} = d\bar{K}/dt$; b) die kinetostatische Methode nach dem Prinzip von d'Alembert, das sich auch auf Flächenkräfte und deren Momente anwenden läßt. Nach diesem Prinzip bekommt man: $\bar{\theta} + (-d\bar{K}/dt) = 0$. Die kinetostatische Größe wird eben mit dem Symbol D bezeichnet, da $\bar{D} = -d\bar{K}/dt$ ist, und als „elastisches Dipolmoment“ bezeichnet.

Daraus ergibt sich sofort $\bar{\theta} + \bar{D} = 0$. Also: der Spannungsunterschied $\bar{\theta}$ steht im Gleichgewicht mit dem Dipolmoment D der inneren „Flächenkräfte“ im Körper. Bisher wurden schon häufig Versuche gemacht, unsymmetrische mechanische Eigenschaften einem elastischen Körper zuzuschreiben. Als Beispiele zitiert Verf. die Arbeiten von S. D. Poisson und W. Voigt, nachher eine andere Hypothese, die von MacCullagh und W. Thomson (Lord Kelvin) stammt, die eine Anzahl von Kreiselpaaren in der Struktur des Körpers annimmt und zur Erklärung der Eigenschaften des Äthers dienen sollte. Der Spannungszustand im festen Körper läßt sich als ein Tensor 2. Ordnung darstellen:

$$(\sigma_{jk}) = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yz} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Dieser Tensor, oder genauer diese Tensordichte (Anmerkung des Ref.), ist nach der üblichen Elastizitätstheorie ein symmetrischer Tensor. Im Falle eines solchen Körpers, den Verf. als paraelastisch bezeichnet, der unsymmetrische Spannungszustände zuläßt, läßt sich der Spannungstensor in zwei zerspalten, deren einer ein gewöhnlicher symmetrischer Spannungstensor τ_{jk} und deren zweiter ϑ_{jk} antisymmetrisch ist. Beide Komponenten des Spannungstensors haben dieselben Invarianzeigenschaften.

$$\tau_i = \tau_{jk}^s = \frac{1}{2}(\tau_{jk} + \tau_{kj}) = \tau_{kj}^s; \quad \vartheta_i = \vartheta_{jk} = \frac{1}{2}(\tau_{jk} - \tau_{kj}) = -\vartheta_{kj};$$

so daß wir schreiben können

$$(\sigma_i) = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_x & \tau_x \\ \tau_x & \sigma_y & \tau_y \\ \tau_y & \tau_y & \sigma_z \end{pmatrix}; \quad (\vartheta_i) = \begin{pmatrix} 0 & -\vartheta_x & \vartheta_y \\ \vartheta_x & 0 & -\vartheta_z \\ -\vartheta_y & \vartheta_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus diesen Matrizen bildet Verf. die Komponenten des Spannungstensors mit den Formeln: $\tau_{jk} = \tau_i + \vartheta_i$; $\tau_{ij} = \tau_i - \vartheta_i$. Ein solches Spannungsfeld läßt sich durch die Ableitungen dreier Funktionen U, V, W darstellen. Diese Funktionen sind als Komponenten eines Vektorfeldes zu betrachten: $\bar{Q} = U \cdot i + V \cdot j + W \cdot k$. Davon kann man eine Matrix herleiten:

$$(Q_{jk}) = \begin{pmatrix} \partial U / \partial x & \partial V / \partial x & \partial W / \partial x \\ \partial U / \partial y & \partial V / \partial y & \partial W / \partial y \\ \partial U / \partial z & \partial V / \partial z & \partial W / \partial z \end{pmatrix},$$

so daß man einen Zusammenhang zwischen dieser Matrix und der Spannungskomponentenmatrix feststellen kann, in der Form:

$$\sigma_x = \partial U / \partial x; \quad \tau_{xy} = \partial V / \partial x; \quad \tau_{xz} = \partial W / \partial x; \quad \tau_{yx} = \partial U / \partial y; \quad \sigma_y = \partial V / \partial y; \\ \tau_{yz} = \partial W / \partial y; \quad \tau_{zx} = \partial U / \partial z; \quad \tau_{zy} = \partial V / \partial z; \quad \sigma_z = \partial W / \partial z;$$

dann läßt sich der Spannungsunterschied $\bar{\theta}$ als Rotation des Vektorfeldes \bar{Q} darstellen:

$$2\bar{\theta} = \text{rot } \bar{Q} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial / \partial x & \partial / \partial y & \partial / \partial z \\ U & V & W \end{pmatrix}.$$

In diesem Falle kann keine Rede sein von einer Spannungsfunktion, oder sogar von drei Spannungsfunktionen, sondern nur von einem „Spannungsvektor“ \bar{Q} . Die potentielle Energie läßt sich in drei Komponenten zerlegen: 1. die Volumänderungsenergie Φ_v , 2. die Formänderungsenergie Φ_f , 3. die Energie der Spannungsunterschiede Φ_{ant} , so daß die ganze potentielle Energie jetzt aus drei Teilen besteht:

$$\Phi = \Phi_v + \Phi_f + \Phi_{\text{ant}} = \frac{1}{2} \sum \sigma_i q_i + \frac{1}{2} \sum \vartheta_{jk} \omega_{jk}.$$

Die Spannungsunterschiede ϑ_{jk} beruhen auf den elementaren Drehungen $\bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{q}$, wo \bar{q} den Verschiebungsvektor bezeichnet. Dann muß im antisymmetrischen Span-

nungszustand eine neue Elastizitätskonstante eingeführt werden: Verf. bezeichnet sie mit H , so daß der dritte Energiebestandteil die Form bekommt:

$$\Phi_{\text{ant.}} = \frac{1}{2} H \cdot \vartheta \cdot \omega = \frac{1}{2} H \omega^2 = \vartheta^2/2 H.$$

Das Dipolmoment nach der vorliegenden Theorie ist leicht zu berechnen, so daß man sofort die Komponenten ϑ_i bekommt. Was Anwendungen betrifft, so gibt Verf. viele Hinweise, wie verschiedene Anstrengungstheorien der Mechanik paraelastischer Körper anzupassen sind. Er beschäftigt sich zuerst mit der Huber-v. Mises-Hencky'schen Theorie, dann mit der Invariantentheorie von W. Burzyński, wovon sich sofort die Beziehung $D^2 = F_0(\Phi_r, \Phi_f)$ ergibt. Ähnlich verhält sich die paraelastische Mechanik zu den Hypothesen von Schleicher, W. W. Sokolowskij und von Dawidenkow-Friedmann. Als eine andere Anwendung gibt Verf. das Beispiel einer asymmetrischen Flüssigkeit an. Die Navier-Stokesschen Gleichungen bekommen dann ein zusätzliches Glied, so daß sie jetzt in folgender Form erscheinen:

$$\rho(\bar{P} - D\bar{v}/Dt) - \text{grad } p + \eta_w \cdot \nabla^2 \bar{v} - \text{rot } d\bar{K}/dt = 0.$$

Weiter finden wir einige Betrachtungen über die Stabilitätsfrage der laminaren und turbulenten Grenzschichten. Zuletzt gibt Verf. rheologische Betrachtungen über Newtonsche und Maxwell'sche Körpermodelle an, sowie auch kurze Angaben über Festigkeitshypothesen, und endlich über die Rheologie der Flüssigkeiten, wo eine neue Gleichung $\bar{\vartheta} = \eta_w \cdot \text{rot } \bar{v} - T \cdot \bar{\vartheta}$ besteht. Am Ende sind im Literaturverzeichnis 67 Arbeiten zusammengestellt.

J. Naleszkiewicz.

Éstrin, M. I.: Über eine Lösungsmethode der homogenen Aufgabe für eine symmetrisch belastete torusförmige Schale. Priklad. Mat. Mech. 17, 619—622 (1953) [Russisch].

Die Behandlung des homogenen Problems der Biegetheorie einer symmetrisch belasteten torusförmigen Schale führt auf eine homogene lineare Differentialgleichung für die komplexe Veränderliche T , aus welcher dann die Schnittkräfte und Schnittmomente berechnet werden können. Wenn sich die Schalenmittelfläche in der Mitte nicht überschneidet, kann man bei dünnen Schalen die Gleichung unter Vernachlässigung unbedeutender Glieder so umformen, daß sie durch den Hillschen Ansatz integriert werden kann. Für die Koeffizienten des Reihenansatzes ergeben sich lineare homogene Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, und durch Nullsetzen der Determinante, welche bei Schalen großer Mittelloffnung schnell konvergiert, erhält man Näherungsausdrücke für die beiden unabhängigen Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung verhältnismäßig schnell. Die Lösungen klingen von je einem Schalenrande ziemlich schnell ab und können deshalb bei genügendem Abstände der beiden Ränder voneinander unabhängig bestimmt werden. Für Torusschalen mit sehr kleinem Verhältnis der beiden Halbmesser werden die Lösungen noch übersichtlicher.

A. Kuhelj.

Galimov, K. Z.: Über einige Probleme aus der Theorie der Schalen bei beliebigen Verrückungen. Izvestija Kazansk. Fil. Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz.-mat. techn. Nauk 3, 3—17 (1953) [Russisch].

Die Arbeit enthält eine Anwendung der nichtlinearen Gleichungen der Schalentheorie auf Schalen mit Vorspannungen. Zunächst werden die Ausdrücke für die Deformationstensoren für drei aufeinanderfolgende Spannungszustände angeführt und die Kompatibilitätsgleichungen bei endlichen Verschiebungen in Krümmungskordinaten geschrieben. Dabei wird der nichtdeformierte Zustand als Anfangszustand angenommen. Nachher wird der Einfluß der Biegung auf die äußeren Kräfte untersucht, und die statischen Randbedingungen für einen zusammengesetzten Spannungszustand werden sowohl in allgemeinen wie auch in Krümmungskordinaten formuliert. Schließlich werden die Stabilitätsgleichungen für elastisches Gleichgewicht unter Berücksichtigung des Einflusses der Biegungen auf die äußeren Kräfte hergeleitet.

S. Drobot.

Iwiński, Tadeusz: On the application of the Laplace transformation to static problems in building. Arch. Mech. stosow. 5, 107—163, engl. Zusammenfassg. 163—164 (1953) [Polnisch].

Die Laplacesche Transformation wurde zur Ermittlung der Durchbiegungen von einfachen und durchlaufenden, statisch belasteten Trägern angewandt. Man berücksichtigte die Setzung der Stützen und die Veränderlichkeit des Trägerquerschnitts.
Z. Kaczkowski.

Jaburek, F.: Die Festigkeit von radial beschauften Laufrädern. Österreich. Ingenieur-Arch. 7, 214—230 (1953).

Die Schaufellaufnradzscheibe wird angenähert als eine orthogonale anisotrope kreisrunde Platte aufgefaßt. Durch eine Superposition von quasi-ebenen Spannungen und überlagerten Biegespannungen wird der Spannungszustand der Schaufellaufnradzscheibe infolge der Fliehkraft bestimmt. Verf. löst die Differentialgleichung der entsprechenden Verschiebungen für beliebige Radformen mit Hilfe der Differenzenrechnung. Für die Berechnung des Deckringes, der bei der geteilten Bauart der Ladegebläse mit dem Schaufelstern als eigenem Teil auftritt, wird ein Berechnungsverfahren nach E. Tschisch angeben. Dieses Verfahren wird dann für die Berechnung des geschlossenen Laufrades mit Deckring angewendet. Als Zahlenbeispiele werden die Spannungsverteilungen im halboffenen und geschlossenen Laufrad sowie die Umfangsspannungen der Deckscheibe in graphischer Darstellung angegeben.
B. Dizioğlu.

Kaczkowski, Zbigniew: The solution of anisotropic plate problems by the method of superposition of wave surfaces of deflection. Arch. Mech. stosow. 5, 455—494, russ. und engl. Zusammenfassg. 494—496 (1953) [Polnisch].

Die Arbeit stellt eine neue, sehr interessante Methode für die Untersuchung der dünnen anisotropen freigelagerten Platten in geschlossener Form mittels der sog. Faltendurchbiegungen dar. Verf. führt dazu die zur Mittelfläche der Platte normalen (zwei oder drei) Belastungen $p_i(x_i)$ ein. Diese Funktionen sollen z. B. für die rechteckigen Platten entsprechende Voraussetzungen erfüllen: 1. $p_i(x_i)$ soll eine periodische Funktion mit der Periode $2c$ bilden. 2. Am Anfang, am Ende und in der Mitte der Periode soll Symmetrie der Belastung auftreten. 3. $x_i = \xi_i c$ ist die Koordinate in der Richtung, die mit der x -Achse den Winkel $\pm (\frac{1}{2}\pi - \alpha)$ bildet. 4. Die Biegesteigkeiten in den Richtungen x_1 und x_2 sollen gleich sein. 5. Es soll auch $p_1(x_1) = p_2(x_2)$ sein. Unter der Belastung $p_i(x_i)$ bildet die Durchbiegungsfläche der Platte eine in den Richtungen $\pm \alpha$ gefaltete Form, deren Differentialgleichung sehr einfache Gestalt hat. Die Zusammensetzung dieser zwei Belastungen $p_1(x_1)$ und $p_2(x_2)$ ermöglicht das „Ausschneiden“ einer rechteckigen, freigelagerten Platte aus der unbegrenzt großen Platte. Die Untersuchung führt auf die Darstellung der Durchbiegungsflächengleichung der anisotropen freigelagerten rechteckigen und auch der auf elastischer Unterlage liegenden, beliebig (normal und tangential zur Mittelfläche) belasteten Platte in geschlossener Form. Verf. verwendet seine Methode auch zur Lösung folgender Probleme: a) Die Bestimmung des Stabilitätskriteriums der rechteckigen Platten, b) die Schwingungen der rechteckigen Platten. Die entsprechenden zusätzlichen Bedingungen ermöglichen es, die Lösung für Parallelogrammplatten anzuwenden. Die Zusammensetzung der drei antisymmetrischen Belastungen $p_i(x_i)$ führt zur Lösung des Problems für Dreieckplatten mit gleichen Seiten. Zum Schluß der Arbeit berichtet Verf. über die Anwendung seiner Methode auf die an den Rändern eingespannten Platten, die aber für diesen Fall praktisch sehr beschränkt ist.
J. Zaradzki.

Kaczkowski, Zbigniew: Representation of the functions of deflection of an infinite strip in closed forms. Arch. Mech. stosow. 5, 589—626, russ. und engl. Zusammenfassg. 626—628 (1953) [Polnisch].

The purpose of the work is to find the deflection surface of an infinite strip, loaded by a point-symmetrical (circular) load at a point of the strip. The used technique is that of applying a system of point-symmetrical loads, alternately positive and negative, suitably located along the element in question. The solution for the deflection of an infinite plate with a point-symmetrical load in a closed form is well-known. The deflection surface of an infinite strip with a point-symmetrical load can be expressed in terms of an infinite series. The sums of the series are representable in closed forms, or by means of definite integrals. The deflection surface of an infinite strip loaded by concentrated moments or by a continuously distributed loading along a certain line-segment can be treated in a similar method. The deflection-surfaces of a semi-infinite strip with various boundary conditions are found in an analogous way. All the formulas are derived in all the details and a very thorough discussion is included following derivation of equations. The contents of the particular sections is the following: summation of infinite functional series; infinite strip with a point-symmetrical (circular) loading; infinite strip loaded non-symmetrically; semi-infinite strip freely supported along all edges; semi-infinite strip freely supported along the edge $y = 0$; semi-infinite strip fixed along the edge $y = 0$; continuous infinite strip consisting of two parts of different elastic properties supported along the joining-line and loaded only on one of the parts. From these examples it follows that the deflection-surfaces can be expressed in terms of four fundamental functions, each in a closed form. The author suggests a preparation of tables of these functions (a task which could be easily done by means of computing machines). No numerical example is calculated.

M. Z. v. Krzywoblocki.

Lufe, A. I.: Das Gleichgewicht einer elastischen Hohlkugel. Priklad. Mat. Mech. **17**, 311—332 (1953) [Russisch].

Das schon von Lamé stammende Problem des Gleichgewichtes einer elastischen Hohlkugel wird gelöst, und zwar nicht nur für den bereits von Thomson und Tait behandelten Fall, wenn an der Grenzoberfläche die Verschiebungen, sondern auch, wenn dort die äußeren Belastungen vorgeschrieben sind. Den Ausgangspunkt der Methode bildet die Papkovitsch-Neubersehe allgemeine Lösung der Laméschen Grundgleichungen der Elastizitätstheorie, welche den Vektor jeder elastischen Verschiebung mit Hilfe von vier harmonischen Funktionen darstellt. Das Vorhandensein der vierten harmonischen Funktion wird für eine beträchtliche Vereinfachung der Rechnung ausgenutzt, deren vektorielle Form die Lösung mit Hilfe der sphärischen Funktionen in übersichtlicher Gestalt darzustellen erlaubt. Die Arbeit enthält auch die Lösung im Falle der Einzelkräfte, wohl auch als Spezialfälle andere bisher bekannte Lösungen, z. B. verschiedene Aufgaben für die Vollkugel. *S. Drobot.*

Mossakovskij, V. I.: Eine Anwendung des Reziprozitätssatzes zur Bestimmung der Summenkräfte und Momente in räumlichen Kontaktaufgaben. Priklad. Mat. Mech. **17**, 477—482 (1953) [Russisch].

Wenn ein harter Stempel in eine elastische Unterlage (elastischer Halbraum) eindringt, können die resultierende Kraft P und die Momente M_x , M_y berechnet werden, wenn die Druckverteilung an der Basis des Stempels bekannt ist. Die Berechnung dieser Druckverteilung, bei beliebiger Form der Basis des Stempels, stellt jedoch ein sehr schwieriges Problem dar, selbst in dem Falle, wenn der Kontaktbereich von einfacher geometrischer Gestalt ist (Kreis, Ellipse). In der Arbeit wird gezeigt, wie man P , M_x , M_y berechnen kann, wenn man die Druckverteilung, welche für eine ebene Basis des Stempels gefunden wurde, zu Hilfe nimmt und den Reziprozitätssatz der Elastizitätstheorie anwendet. Da bei der Berechnung des Druckes an der Stempelbasis mit den üblichen Methoden mühsame Integrationen vorzunehmen sind, wird vom Verf. die Methode des Cauchyschen Integrals nach Muschelishvili erfolgreich herangezogen.

J. Beránek.

Nash, W. A.: Buckling of multiple-bay ring-reinforced cylindrical shells subject to hydrostatic pressure. *J. appl. Mech.* **20**, 469—474 (1953).

The analytical treatment of the problem of the buckling of a cylindrical shell was carried out by many authors (Bresse in 1859, Bryan in 1888, Southwell in 1913, von Mises in 1914 and 1929, Windenburg in 1934, Batdorf in 1947, Salerno and Levin in 1950). In addition to these analyses numerous experimental investigations of the same problem have been conducted. This paper deals also with analytical treatment of the above titled name predicated upon the classical small deformation theory of elastic thin shells (Love). It is assumed that the rings are spaced equally along the axis of the cylinder and of uniform cross section around the circumference of any ring. For this analysis it is sufficient to isolate and to study one bay of the shell using the method of minimum potential. The paper has two parts. In the first part the rings of infinite rigidity and arbitrary cross section and in the second one the rings of finite rigidity and of rectangular cross sections are discussed. Expressions for the elastic strain energy in the shell and in the rings, as the work done by the external forces, are written in terms of displacement components of a point in the middle surface of the shell. In contrast to the previous investigators a displacement configuration is introduced in accord with experiments. The critical pressure at which buckling of a shell will occur is determined from the condition of minimization of total potential. One numerical example is discussed.

D. Rašković.

Nowacki, Witold: On certain cases of torsion of bars: *Arch. Mech. stosow.* **5**, 21—45, engl. Zusammenfassg. 46 (1953) [Polnisch].

In previous papers the author gave a number of solutions of boundary value problems of plates with mixed boundary conditions. In the present paper he applies his method to the Poisson equation, showing the way in which this can be used for solving problems of torsion of orthotropic bars. To visualize the procedure, he uses an auxiliary model constituted by a flexible membrane subjected to lateral deformation. Thus, an exact solution is obtained for elastic torsion of straight rectangular bars with narrow slots and bars the cross-section of which is composed of a number of rectangles. Also the problem of bars the cross-section of which has the form of an annular sector or a circle with slots is discussed. The solution is composed of two components: The solution $w_0(x, y)$ for a membrane with uniform boundary conditions, and the solution $w_1(x, y)$ taking the influence of "supports" (slots) along the corresponding segments. Such an approach leads to a Fredholm integral equation of the first kind or a system of such equations.

W. Olszak.

Nowacki, W. and J. Mossakowski: The influence surfaces of plates representing annular sectors. *Arch. Mech. stosow.* **5**, 237—271, engl. Zusammenfassg. 271—272 (1953) [Polnisch].

The paper contains a complete solution of the bending problem of a wedge-shaped plate, semi-infinite or finite, under arbitrary given load. The method used consists in splitting the biharmonic equation of the plate (in polar coordinates) into two equations: Laplace's and Poisson's equations, and in developing the unknown functions into Fourier's series. The trick which allows to obtain the solutions in a closed form consists in some identities between differential expressions involved. It leads also to a closed expression of the Green's function for a finite annular sector, and, thus, permits to solve the problem for any given load. Some previous known results appear as particular cases of the general solution given by the authors.

S. Drobot.

Nowiński, Jerzy: The torsion of a rectangular rod in which one cross section remains plane. *Arch. Mech. stosow.* **5**, 47—64, engl. Zusammenfassg. 65 (1953) [Polnisch].

This paper deals with the analysis of the torsion of prismatical bars of rectangular cross-section in which one of the cross-sections remains plane (i. e. its warping is prevented). The author gives an approximate solution of this problem using the energy method in the following way. The warping of a section at the distance z from the fixed end is expressed by the known warping of the Saint-Venant torsion multiplied by the factor $(1 - e^{-\gamma z})$. Then, the components of the state of stress are calculated, and the parameter γ is determined from the Castigliano's principle. (The same method was used by A. and L. Föppl for bars of elliptical cross-sections, and by S. Timoshenko for bars of cross-sections in the form of narrow rectangles.) A discussion of the influence of the aspect ratio of the cross-section on the parameter γ is given.

M. Bieniek.

Olśzak, Wacław: Généralisation de l'analogie de la membrane élastique aux problèmes des systèmes anisotrope. Arch. Mech. stosow. 5, 89—105, französ. Zusammenfassg. 106 (1953) [Polnisch].

In der Arbeit wurde dank der linearen Transformation die bekannte Prandtl'sche Membran-Analogie auf das Problem der Torsion von Stäben, die sich durch monoklinische Anisotropie kennzeichnen, ausgedehnt. Es wurde eine Reihe neuer Beispiele erörtert. Unter anderem wurde nachgewiesen, daß im Falle eines anisotropen Stabes mit kreisartigem oder elliptischem Querschnitt die Spannungen (ähnlich, wie in einem isotropen Stabe) nicht von den Materialkonstanten abhängen. Die Strukturänderung (von der Isotropie zur Anisotropie) beeinflußt in diesem Falle nur die Torsionssteifigkeit des Stabes.

Witold Nowacki.

Olśzak, Wacław: Le problème de l'orthotropie dans la théorie de la charge limite des plaques. Arch. Mech. stosow. 5, 329—348, russ. und französ. Zusammenfassg. 348—350 (1953) [Polnisch].

The theory of the limiting loading of anisotropic plates, and in particular of orthotropic plates, possesses a considerable practical importance. It is a well-known phenomenon that the concentration of stresses in the form predicted by the elasticity theory for the dangerous local regions, is very much weakened by the possibility of occurrence of the plastic deformations. Consequently, the application of the maximum elastic stresses as a criterion of the judgement of the possible limiting loading of structures could not be properly justified. This refers to both the structures statistically determined as well (or even more) as to the structures statistically undetermined. For this reason they introduce the notions of the limiting loading based on the plastic deformations and that of the destructing loading. The present work refers to plates of two kinds: anisotropic and isotropic; the general method is given of reduction of the process of calculating the limiting loading of anisotropic plates to the process of calculating the limiting loading of isotropic plates. This is achieved by means of a linear transformation. The limiting loading refers to plastic ultimate deformations. Practically, the calculations refer to steel-reinforced concrete plates, in particular to orthotropic plates (cross-reinforcing elements). The technique is thoroughly presented and all the formulas are derived. The author states that a similar transformation can be applied to anisotropic thin-walled cylindrical shells. The procedure of calculating the limiting loading for such structural elements is reducible to the procedure of calculating the limiting loading for the corresponding isotropic elements. In this case one has to distinguish between short and long shells. The long shells behave in the limiting state like beams of properly chosen cross-sections. The short shells behave differently; the surface action appears here as an important element. Analogously, the torsion of the anisotropic bars is included into this technique. The technique is illustrated by means of an example: an isotropic elliptic plate, freely supported along the perimeter, loaded by a concentrated load, located on the greater axis, is analysed with reference to the limiting state. The

particular details of the technique involve the principle of virtual work. The results, so obtained were transferred directly to an anisotropic (orthotropic) plate of the same shape.
M. Z. v. Krzywoblocki.

Rostoveev, N. A.: Die komplexen Spannungsfunktionen bei der axial-symmetrischen Kontaktaufgabe der Elastizitätstheorie. *Priklad. Mat. Mech.* **17**, 611—614 (1953) [Russisch].

Die vorliegende Arbeit behandelt das Problem des Andrückens eines harten Stempels an eine elastische Unterlage. Als dreidimensionales achsen-symmetrisches Problem der Elastizitätstheorie betrachtet, wird die Berechnung des Spannungsfeldes in diesem Falle gewöhnlich so vorgenommen, daß eine der Spannungsfunktionen als Flächenpotential einer Massenbelegung dargestellt wird, wobei die Flächendichte durch den Druck im Berührungsgebiet gegeben ist. Da jedoch dieser Druck im voraus unbekannt ist, muß er als Lösung einer Integralgleichung gefunden werden. Diese Schwierigkeit wird vom Verf. umgangen, indem für eine der Spannungsfunktionen der Ansatz

$$\varphi = \operatorname{Im} \int_0^a h(u) \log [z + iu + \sqrt{(z + iu)^2 + t^2}] du$$

gemacht wird. Hierin ist $h(u)$ eine Hilfsfunktion, die durch direkte Quadraturen ermittelt wird. Im Spezialfall eines Stempels mit rechteckigem Meridianschnitt ist $h(u) = c\delta(u - a)$ zu nehmen (δ -Diracsche Funktion).
J. Beránek.

Seremet'ev, M. P.: Die Biegung dünner Platten mit unterstütztem Rand. *Ukrain. mat. Žurn.* **5**, 58—79 (1953) [Russisch].

The author investigates the problem of the deflection of a thin isotropic plate for which either the outer edge or an inner hole is reinforced with a ring plate. The plates have different flexural rigidities. The transverse forces and bending moments are distributed around the outer boundary. A solution is found for an infinite isotropic plate with a circular hole reinforced with a ring for the case in which the moments at infinity have limited values. The same problem is considered in the anisotropic case.
V. Bogunović.

Seremet'ev, M. P.: Das elastische Gleichgewicht eines elliptischen Ringes. *Priklad. Mat. Mech.* **17**, 107—113 (1953) [Russisch].

L'A. présente une étude de l'anneau elliptique (domaine doublement connexe bordé par des ellipses homofocales), actionné par des tensions sur la frontière extérieure. On utilise la méthode des fonctions de variables complexes, en transformant conformément l'anneau elliptique sur un anneau circulaire. On donne aussi un exemple de calcul effectif.
P. P. Teodorescu.

Vinokurov, S. G.: Temperaturspannungen in Platten und Schalen. *Izvestija Kazansk. Fil. Akad. Nauk SSSR. Ser. fiz.-mat. techn. Nauk* **3**, 18—38 (1953) [Russisch].

Es handelt sich um die Lösung nichtlinearer Aufgaben der Elastizitätstheorie unter dem Einfluß eines ungleichmäßigen Temperaturfeldes. Um die Wirkung des ungleichmäßigen Temperaturfeldes und dadurch entstehende Wärmespannungen in den Schalen und Platten auszudrücken, transformiert Verf. die Differentialgleichungen für die Spannungsverteilung, indem er Hilfsspannungen einführt. Das Ausdrücken der wirklichen Spannung als Summe der Hilfsspannungen, welche gewöhnlich mit den Dehnungen und mit dem durch die Temperatur entstehenden Druck verbunden sind, ist auch günstig bei der Ableitung der Gleichungen für die Formänderungsarbeit. Solche Behandlungsart ist sehr günstig bei Verwendung der Variationsrechnung zur Lösung von nichtlinearen Aufgaben der Elastizitätstheorie für dünne Platten und Schalen unter Einfluß eines ungleichmäßigen Temperaturfeldes.
W. Iwanow.

● Müller, F. Horst (herausgegeben von): **Das Relaxationsverfahren der Materie.** 2. Marburger Diskussions-Tagung 2.-4. Okt. 1953. Darmstadt: Verlag Dr. Dietrich Steinkopff 1953. IV, 224 S. 122 Abb. kart. DM 24,—.

Die Arbeiten werden — soweit hier von Interesse — nachstehend besprochen.

Meixner, J.: Die thermodynamische Theorie der Relaxationserscheinungen und ihr Zusammenhang mit der Nachwirkungstheorie. Relaxationsverhalten der Materie. 2. Marburger Diskusstagung, 3—20 (1953).

Il lavoro è principalmente rivolto a stabilire una interessante relazione tra la teoria termodinamica (soggetta a diverse ipotesi semplificatrici) del rilassamento e quella dei solidi dotati di ereditarietà. Ciò è ottenuto considerando dei sistemi soggetti anche a trasformazioni interne individuate da un numero finito, o anche infinito, di parametri ξ i quali, in aggiunta a pressione, volume specifico, entropia, temperatura, individuano lo stato termodinamico del solido. Si presuppone anche che la variazione temporale di ciascuna ξ sia funzione lineare delle affinità, e che le trasformazioni siano piccole in modo di avere a che fare con equazioni linearizzate. In queste vengono a figurare i tempi di rilassamento, diversi a seconda del tipo delle trasformazioni considerate. La eliminazione dei parametri ξ tra le equazioni di stato conduce ad equazioni differenziali, e queste ultime possono essere trasformate in equazioni integrali che appunto, sottolineate le loro caratteristiche, rappresentano il punto di contatto con la teoria ereditaria. A questo proposito, sembra opportuno il richiamo anche ai risultati conseguiti da D. Graffi [Atti Accad. Ligure Sci. Arti 9, 1—7 (1952)]. La teoria viene illustrata con due interessanti esempi.

T. Manacorda.

Jenekel, Ernst: Zur Verwendung von Modellen für das plastisch-elastische Verhalten. Relaxationsverhalten der Materie. 2. Marburger Diskussionstagung, 47—64 (1953).

The use of linear mechanical models for the representation of visco-elastic behavior is discussed and the equations of the Maxwell-, Voigt-, standard-solid- and Burgers models are integrated for simple loading histories including stationary oscillations.

A. M. Freudenthal.

Gross, B.: Relaxationsspektren. I. Relaxationsverhalten der Materie. 2. Marburger Diskussionstagung, 65—72 (1953).

The theory of continuous relaxation spectra as a representation of linear visco-elastic behavior is presented and the interrelations discussed with the creep- and relaxation-functions, with the complex moduli and compliances, as well as between the distributions of relaxation- and retardation-times.

A. M. Freudenthal.

Gross, B.: Prinzipielles zum Problem der Relaxationsspektren. Rheologische Verteilungsfunktionen. II. Relaxationsverhalten der Materie. 2. Marburger Diskussionstagung, 73—84 (1953).

The basis of the theory of relaxation spectra presented in the first part of the paper is critically considered with respect to its physical and mathematical implications.

A. M. Freudenthal.

Bojanić, Ranko und Vladeta Vučković: Über die Eigenfunktionen der schwingenden Platte. Srpska Akad. Nauka, Zbornik Radova mat. Inst. 35, Nr. 3, 107—126, deutsche Zusammenfassg. 126—128 (1953) [Serbisch].

Let S be an open and bounded domain of the x, y plane and S' the border of S ; S' is smooth. Further let be λ_n the eigenvalues and $\Phi_n(P)$ the set of the orthonormal eigenfunctions of the eigenvalue problem $\Delta u - \lambda u = 0$, $P \in S$, $u = 0$, $u_n = 0$, $P \in S'$, where P (and also Q) is a point in S . Following Pleijel's problem based on Carleman's procedure, the authors consider the asymptotic behavior of the functions $E(\lambda) = \sum \Phi_n^2(P)$ and $I(\lambda) = \sum \Phi_n(P) \Phi_n(Q)$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$. On the contrary to the known Hardy-Littlewood theorem one deduces another theorem of Tauber kind and

one gives the results

$$E(\lambda) = \sqrt{\lambda/4\pi} + O(\lambda^{1/4}), \lambda \rightarrow \infty; I(\lambda) = O(\lambda^{1/4}), \lambda \rightarrow \infty$$

based on the following asymptotic formulae

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \lambda)^{-1} \Phi_n^2(P) = (8\lambda^{1/2})^{-1} + O(\exp(-c\lambda^{1/4}));$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \lambda)^{-1} \Phi_n(P) \Phi_n(Q) = O(\exp(-c\lambda^{1/4})); \quad \lambda \rightarrow \infty$$

deduced from the lemma: "Let $S(u)$ be of bounded variation on each finite interval and let

us assume, that the integral $f(x) = \int_0^{\infty} (u-x)^{-1} d\{S(u)\}$ converges for one, and hence for each $x > 0$, then from $f(x) = O(\exp(-cx^{1/4})), x \rightarrow \infty, c > 0$, and from the condition of the convergence $S(v) - S(u) = o(u^{1/4})$ for all $u \leq v \leq u + u^{3/4}$, it follows $S(u) = O(u^{1/4}), u \rightarrow \infty$ ".

D. Rašković.

Lee, E. H.: A boundary value problem in the theory of plastic wave propagation. *Quart. appl. Math.* **10**, 335—346 (1953).

La determinazione del comportamento di un solido che presenti zone elastiche e zone plastiche richiede la risoluzione di sistemi differenziali in campi in generale a priori incogniti. Nel presente lavoro viene invece trattato un problema unidimensionale nel quale questa grave difficoltà può essere superata. Un cilindro omogeneo mobile di moto traslatorio uniforme urta contro un ostacolo fisso. Nella base che urta lo sforzo sale bruscamente al valore del limite plastico, e un'onda elastica si propaga lungo il cilindro verso la base libera. Qui essa viene riflessa, e si presenta come un'onda di decompressione, gradualmente assorbita dal mezzo nel frattempo plasticizzato, e che può ridurre le zone plastiche nuovamente ad elastiche, pur senza escludere una successiva nuova plasticizzazione. E' appunto questo il problema che qui viene affrontato e risolto completamente.

T. Manacorda.

Maue, A. W.: Die Beugung elastischer Wellen an der Halbebene. *Z. angew. Math. Mech.* **33**, 1—10 (1953).

Die Arbeit behandelt nach der Methode von Clemmow und Hönl das Problem der Beugung elastischer ebener Wellen an der Halbebene unter Beschränkung auf den Fall, daß die Welle senkrecht zur Halbebene einfällt. Der Grundgedanke besteht darin, die Lösung als Superposition ebener Wellen darzustellen. Ein ähnliches Verfahren wurde von A. Sommerfeld für die Beugung von Schallwellen an der Halbebene entwickelt. Im Gegensatz zu der Sommerfeldschen Methode, die mit Hilfe mehrdeutiger Lösungen der Helmholtzschen Schwingungsgleichung arbeitet, wird hier nach einem Gedanken von Clemmow eine explizite Lösung durch komplexe Integrale unmittelbar angegeben. Die Arbeit schließt mit einer asymptotischen Untersuchung der gebeugten Wellen in weitem Abstand von der Kante der Halbebene. *Claus Müller.*

Nowacki, Witold: Vibrations and buckling of rectangular plates simply supported on the periphery and at several points inside. *Arch. Mech. stosow.* **5**, 437—452, russ. und engl. Zusammenfassg. 452—454 (1953) [Polnisch].

The author investigated the harmonical vibrations of a simply supported plate under the uniformly distributed compression forces acting along two parallel edges of this plate. For the solution of this problem in the case of the points-support-form there is considered the surface of deflections, which we obtain from the acting of concentrate harmonical reaction of this support. The condition, that a deflection above this support is equal to zero, implies the frequency-equation (or the critical forces equation). In similar manner is obtained the solution of the plate with several points inside. The conditions that the deflections about the supports are equal to zero imply a linear system of algebraic equations, homogenous with respect to the amplitudes of unknown reactions. In the case of a spring supported plate there is

obtained the inhomogeneous equation. At least the case of a linear supported plate reduces to the solution of an integral equation of the Fredholm type. In the paper there are introduced many numerical investigations according to the modulus of critical loading and to the frequency of vibrations. The author provides the discussion-analysis of the useful problems of points-supports and line-supports in view of structures.

St. Ziemba.

Teodorescu, N.: L'onde de choc dans la théorie invariante de la propagation des ondes. Acad. Republ. popul. Române, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. 5, 19—39, russ. und französ. Zusammenfassg. 34—38 (1953) [Rumänisch].

L'analyse du principe des ondes enveloppes conduit à concevoir les ondes non pas comme des lieux de points ébranlés, mais comme des multiplicités d'éléments de contact unis au sens de Lie, portant les perturbations du champ. On utilise les notions suivantes: dans l'espace-temps, considéré comme une variété à n dimensions V_n , une onde S_{n-1} est une multiplicité d'éléments de contact unis L_{n-1} , ayant les centres M sur la variété ponctuelle S_{n-1} , figurant la marche d'une onde S_{n-2} formée aussi d'éléments de contact L_{n-1} passant par les L_{n-2} tangents à la variété ponctuelle S_{n-2} . Une onde S_{n-2} est dite propageable si: 1^o elle est contenue par une onde S_{n-1} ; 2^o la distribution des perturbations sur les L_{n-2} de S_{n-2} détermine la distribution des perturbations sur les L_{n-1} de S_{n-1} , lorsqu'on connaît aussi les perturbations d'ordres inférieure sur S_{n-1} . Les L_{n-1} d'une onde S_{n-1} , obtenue par la propagation d'une onde S_{n-2} , s'appellent corpuscules C_M . L'A. nomme perturbations les discontinuités de première espèce d'un champ $u(P)$ et de ses dérivées des divers ordres à la traversée d'un L_{n-1} au point M d'une onde S_{n-1} . Une onde de choc est une onde portant les perturbations d'ordres zéro et un du champ $u(M)$ et de ses dérivées, dans une direction l extérieure à S_{n-1} , les dérivées intérieures étant supposées continues. L'équation (1)

$$F(u) = a^{ij} \partial^2 u / \partial x^i \partial x^j + b \partial u / \partial x^i + c u = f$$

vérifiée par $u(P)$ est du type hyperbolique à coefficients fonctions régulières d'une classe convenable C^r dans un domaine D de V_n . Dans cet article, l'A. se propose de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une onde de choc soit propageable et de montrer que la propagation des perturbations du premier ordre d'un champ discontinu sur une S_{n-1} , ayant des dérivées premières discontinues sur une S_{n-2} propageable, met en évidence la structure corpusculaire des ondes, introduite par l'A. dans sa théorie invariante de la propagation des ondes. — Les principaux résultats obtenus sont les suivants: Pour qu'une perturbation d'ordre m du champ scalaire $u(P)$, solution régulière de la classe C^p ($p \geq 2$) de l'équation (1) dans le domaine $D \supset S_{n-1}$, soit propageable sur S_{n-1} , il faut que $m \geq 1$ et que S_{n-1} soit une caractéristique de l'équation (1). Les champs $u(P)$ comportant des discontinuités propageables doivent être rapprochés des solutions généralisées introduites par S. L. Sobolev. La méthode de calcul des sauts du champ et de ses dérivées conduit aux expressions des sauts $[u] = \chi(M)[du][d^2u]$ par les formules $[du] = d_i \chi + \lambda dG$ et $[d^2u] = d_i^2 \chi + 2 d_i \lambda dG + \lambda d^2G + \mu (dG)^2$, où χ , λ , μ représentent respectivement les coefficients de saut de u et de ses dérivées des deux premiers ordres, d_i , d_e signifiant des différentielles dans les directions intérieures, respectivement extérieures à S_{n-1} . Les formules obtenues par cette méthode générale et invariante corrigent celles données par Hadamard dans le cas particulier d'un champ continu à dérivées du premier ordre discontinues et tous les termes ont des significations géométriques. La relation entre les coefficients de saut χ , λ et μ sur un élément L_{n-1} d'une S_{n-1} est

$$\mu a^{ij} p_i p_j + 2a^{ij} \lambda_i \lambda_j - \lambda(a^{ij} p_{ij} - b^i p_i) + a^{ij} \chi_{,ij} + b^i \chi_{,i} + c \chi = 0.$$

On en déduit que la condition nécessaire et suffisante pour que les perturbations du second ordre ne soient pas déterminées par celles d'ordres inférieurs est que S_{n-1} soit caractéristique. Une onde S_{n-2} est dite spatiale si ses éléments L_{n-2} ne contiennent

que des directions extérieures à l'hypercône caractéristique élémentaire du point considéré. Pour qu'une onde de choc S_{n-2} d'un champ $u(P)$, solution de l'équation (1), soit propageable, il faut et il suffit que S_{n-2} soit spatiale et qu'elle soit contenue par une onde S_{n-1} caractéristique portant des perturbations. Dans ce cas, l'équation de la propagation des perturbations du premier ordre est $2d\lambda/ds + \tilde{\lambda}'(t) - \tilde{\lambda}^*(x) = 0$, (2), où la dérivation se fait dans la direction de la tangente à la bicaractéristique du point M sur S_{n-1} . Cette équation est plus générale que celle qu'on utilise d'habitude, parce qu'elle comporte aussi le terme $\tilde{\lambda}^*(x)$ provenant du saut du champ même et ce terme est essentiel. Une onde de choc propageable S_{n-2} est effectivement propagée sur l'onde caractéristique S_{n-1} , qui la contient, et la propagation par ondes de choc S_{n-2} est uniquement déterminée sur les ondes S_{n-1} formées de corpuscules. Les corpuscules seront par la suite des éléments de contact tangents à l'hypercône caractéristique élémentaire du point ébranlé. L'équation de propagation (2) montre que le saut $\lambda(M')$ en un point M' voisin de M sur le rayon de propagation (bicaractéristique de M') est déterminé non seulement par sa valeur $\lambda(M)$ en M , mais aussi par la distribution des perturbations d'ordre zéro $\lambda(M)$ dans le voisinage de M sur S_{n-1} [présence du terme $\tilde{\lambda}^*(x)$]. Par conséquent, au point de vue de la propagation, toute onde S_{n-1} doit être conçue comme multiplicité de corpuscules portant (en première approximation) les perturbations d'ordre zéro, qui interviennent dans la propagation des perturbations du premier ordre. L'influence de ces perturbations, qui ne sont pas propageables, n'a pu être observée parce qu'on a considéré uniquement le cas des champs continus, pour lesquels $\tilde{\lambda}^*(x) = 0$. L'équation correspondante $2d\lambda/ds + \tilde{\lambda}'(t)\lambda = 0$, étant alors homogène, on tire la conclusion que le saut $\lambda(M)$ est déterminé par sa valeur λ_0 en un point M_0 du rayon de propagation, sans observer que cela implique que les perturbations d'ordre zéro sont nulles sur les corpuscules de S_{n-1} . Lorsque le champ est lui-même discontinu et qu'on donne sur une S_{n-2} une distribution de perturbations du premier ordre nulle, on obtient par propagation des perturbations $\lambda(M)$ non nulles sur S_{n-1} à l'encontre de ce qui arrive dans le cas du champ continu pour lequel les dérivées du premier ordre restent alors continues sur S_{n-1} . L'explication de ce fait consiste en ce que la propagation se fait par corpuscules et que, dans le premier cas, les perturbations d'ordre zéro, n'étant pas nulles sur les corpuscules de S_{n-1} , entraînent l'existence des perturbations du premier ordre, le long du rayon de propagation. Par conséquent, l'onde de choc propageable doit être considérée comme formée de corpuscules.

Dan Gh. Ionescu.

● Swenson, George W.: *Principles of modern acoustics*. New York: D. van Nostrand Company, Inc.; London: Macmillan and Co., Ltd. 1953. VII, 222 p. 30 s. net.

Hydrodynamik:

Olszak, W. et J. Litwiniszyn: Sur un phénomène non-linéaire d'écoulement d'un liquide comme un modèle rhéologique. Arch. Mech. stosow. 5, 557—580, russ. und französ. Zusammenfassg. 580—583 (1953) [Polnisch].

Verff. verwenden bei der Analyse des Dehnungszustandes (unter Berücksichtigung der rheologischen Eigenschaften des Stoffes) ein sogenanntes hydraulisches Modell und stellen seine Theorie und praktische Anwendung dar. Die Theorie beruht auf der Analyse des freien Ausflusses der Flüssigkeit aus einem Behälter mit veränderlichem Querschnitt. So kann man den beliebigen Deformationsprozeß als Funktion der Zeit modellieren. Besonders günstig ist die Annahme dieser Funktion in der Gestalt eines Polynoms. Verff. verwenden auch das hydraulische Modell mit zwei Behältern (mit konstantem und veränderlichem Querschnitt), das insbesondere Anwendung für die nichtlineare Deformationsfunktion findet. Es gilt für dieses Modell die Differentialgleichung:

$$d^2z_1/dt^2 + A(z_1)(dz_1/dt)^2 + B(z_1)dz_1/dt + c(z_1) = 0.$$

Die Funktion der Niveauhöhe $z_1(t)$ stellt also die Lösung dar und beschreibt auch

den entsprechenden rheologischen Prozeß. Es folgt u. a. aus der Analyse des Problems, daß für die Belastung $\sigma < \sigma_{\text{krit}}$ die Stabilisation der Deformation nach einer bestimmten Zeit t_1 stattfindet (für das klassische Modell ist $t_1 = \infty$), was wir bei den reellen rheologischen Prozessen beobachten können. Verff. vergleichen ihre theoretischen Betrachtungen z. B. mit den Experimenten von G. Magnel (Kriechen und Relaxation des Stahles mit $R_r = 15.2 \text{ kg/mm}^2$, $Q_r = 13 \text{ kg/mm}^2$) und erhalten dabei gute Übereinstimmung der Theorie mit den Experimenten. Wichtig und interessant sind die Schlußbemerkungen der Verff. über die Verallgemeinerung ihrer Theorie für andere Stoffe, bei der physikalischen Nichtlinearität, bei der Berücksichtigung der Schrumpfung usw.

J. Zawadzki.

Slezkin, N. A.: Eine Verallgemeinerung des Helmholtz'schen Satzes über die Zerlegung der Bewegung eines Teilchens. Vestnik Moskovsk. Univ. 8, Nr. 9 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 6) 17—33 (1953) [Russisch].

Seine frühere Diskussion über die Herleitung der Grundgleichungen der Hydromechanik fortsetzend [Vestnik Moskovsk. Univ., 6, Nr. 10, 3—23 (1951)], erörtert Verf. seine Auffassung der Kinematik des Kontinuums, indem er die Helmholtz'sche Zerlegung der Bewegung eines Kontinuums in Translations-, Rotations- und Deformationskomponenten auf die Betrachtung der Kinematik eines Systems von diskreten materiellen Punkten zurückführt. Einige Bemerkungen über die Veränderlichkeit der Masse der Kontinuumssteilchen, den Übergang vom diskreten zum kontinuierlichen System und den dabei benutzten Begriff des Mittelwertes der Geschwindigkeit und endlich einige Bemerkungen über die Größe der Flüssigkeitsteilchen schließen diesen Artikel, über dessen Inhalt die Schriftleitung zum Meinungsaustausch einlädt.

S. Drobot.

Şabac, Ion Gh.: Sur le retour de 180° d'un courant plan. Acad. Republ. popul. Române, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. 5, 83—125, russ. und französ. Zusammenfassg. 119—125 (1953) [Rumänisch].

Dans ce travail, l'A. étudie le problème du retour de 180° d'un courant plan en l'appliquant ensuite à la construction d'une soufflerie à circuit fermé, à un seul canal de retour et à coudes sans aubages. Le premier chapitre est dédié à l'étude du coude circulaire ayant pour schéma théorique l'écoulement résultant d'un tourbillon ponctuel en fluide illimité. L'A. examine les répartitions des vitesses obtenues expérimentalement dans les diverses régions de ce coude et il en tire des conclusions qui le conduisent à l'amélioration des conditions à l'entrée du coude. Dans le II-ème chapitre l'A. remplace le coude demicirculaire par un coude résultant d'un tourbillon dans un fluide limité par les parois d'un rectangle avec une cotée à l'infini. On déduit les éléments caractéristiques du mouvement et on donne quatre tableaux de valeurs numériques et deux graphiques. Le III-ème chapitre est consacré à l'étude des collecteurs symétriques et dissymétriques, utilisés pour l'étude des coudes isolés. Dans ces cas le schéma théorique est donné par deux tourbillons en présence des parois considérés au II-ème chapitre. On donne des détails relativement à deux collecteurs qui ont été construits d'après le schéma et les calculs fait par l'A. Les résultats expérimentaux sont enregistrés dans deux tableaux et représentés dans deux figures. Dans le IV-ème chapitre on montre la manière dont ont été utilisés les résultats obtenus dans les chapitres antérieurs à la construction d'une soufflerie à canal de retour unique et à coudes sans aubages. Les résultats expérimentaux obtenus sont comparés à ceux donnés par la soufflerie à deux canaux de retour de V. Vălcovici et I. Stroescu [Schriften der Deutsch. Akad. Luftfahrtforsch. 7 B, Heft 3 (1943)].

Simona Popp.

John, Fritz: Two-dimensional potential flows with a free boundary. Commun. pure appl. Math. 6, 497—503 (1953).

A method for obtaining 2-dimensional flows of an incompressible, irrotational liquid with a free surface is described (gravity may be present and flow is not required

to be steady). The determination of such a type of flow, which is analytic along the free boundary depends upon the solution of a linear parabolic differential partial equation. Let w denote a Lagrange coordinate along a free boundary C_1 with parameter representation $z = x + iy = f(w, t)$, then $f_w + ig = ir(w, t) f_w$ for some real function $r(w, t)$, which expresses the constant pressure condition on C_1 (g is the gravitational constant, the y -axis is assumed to be vertical). Any solution f of this equation, for suitably chosen $r(w, t)$, represents a possible free surface motion for which the corresponding liquid motion can be obtained by a quadrature.

A. van Heemert.

Nekrasov, A. I.: Bestimmung der zweidimensionalen Potentialbewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit bei vorgegebenen Werten ihres Geschwindigkeitsbetrages. *Priklad. Mat. Mech.* **17**, 483—484 (1953) [Russisch].

Lunc, Michail: Über die Kräfte, die auf eine variable Kontur in einer zirkulationslosen idealen Flüssigkeitsströmung wirken. *Arch. Mech. stosow.* **5**, 167—192, russ. Zusammenfassg. 192 (1953) [Russisch].

Betrachtet wird der allgemeine Fall einer ebenen, zirkulationslosen Umströmung einer von der Zeit abhängigen Kontur. Mit Hilfe einer gegebenen, von der Zeit abhängigen Transformation wird die Kontur konform auf einen festen Kreis abgebildet. Auf diese Weise kann das von der Variation der Kontur abhängige Perturbationspotential und die auf die Kontur wirkende Gesamtkraft berechnet werden. Einige Zahlenbeispiele werden angeführt.

F. Labisch.

Serrin, James: On plane and axially symmetric free boundary problems. *J. rat. Mech. Analysis* **2**, 563—575 (1953).

Es werden unter Anwendung hydrodynamischer Vergleichssätze Untersuchungen über ebene, symmetrische und über räumliche, axialsymmetrische, drehungsfreie Strömungen idealer inkompressibler Flüssigkeiten durchgeführt, und zwar speziell im Fall, daß sich hinter einem Hindernis ein Kavitations- oder Kielwasserbereich bildet, und im Falle eines freien Strahles aus einem Gefäß oder Kanal. Der Verf. gewinnt Aussagen über das geometrische Verhalten der freien Stromlinien bei diesen Problemen. Er beweist ferner, daß es für eine gewisse Klasse von Hindernissen in einem unendlich langen, geraden Kanal bei vorgeschriebenem Fluß höchstens eine Strömung mit unendlich großem Kavitationsbereich gibt. Außerdem führt er ein symmetrisches Hindernis vorgegebener Dimensionen an, das einen kleinen Kavitations- oder Kielwasserwiderstand verursacht.

E. Hölder - S. Gähler.

Scholz, Norbert: Berechnung der Druckverteilung der ebenen Platte im Gitterverband. *Abh. Braunschweig. wiss. Ges.* **5**, 152—163 (1953).

Der Verfasser leitet die Formel für die konforme Abbildung des Äußeren des $\frac{1}{2}$ -Einheitskreises auf das Äußere eines ebenen gestaffelten Gitters in der z -Ebene ab. Die einzelnen Abbildungsschritte werden illustriert. Er berechnet dann allgemein die Tangentialgeschwindigkeiten an einer Platte im Gitterverband, die unter dem Winkel α_0 angeströmt wird und bei der die Kuttasche Abflußbedingung erfüllt ist. Außerdem gibt er den Abströmwinkel β_2 als Funktion des Anströmwinkels β_1 an. Allerdings ist die entsprechende Formel (27) unklar. Zum Schluß rechnet der Autor die Tangentialgeschwindigkeiten und Druckbeiwerte auf einer Platte bei Staffelungswinkeln λ des Gitters von $\lambda = 0^\circ$, $\lambda = 30^\circ$ und $\lambda = 60^\circ$ numerisch durch und zeichnet dafür Diagramme auf. Es wäre vielleicht wünschenswert, in der Tafel 3 zu den x -Werten auch noch die q -Werte anzugeben, um die Abbildung wenigstens auf den Konturen numerisch zu beherrschen. Leider enthält die Arbeit eine Reihe von Druckfehlern. (siehe z. B. S. 154, 155, 160, 161).

E. Meister.

Pereira Gomes, A.: Sur la méthode de Monaghan pour la détermination d'un coude. *Revista Académica de Engenharia* **9**, 27—35 (1953).

Verf. unterzieht die genannte Arbeit (Monaghan. A method for Design Corner Channels and Cascades on a Hyperbolic Baseline. Aeronaut. Res. Council. Rep. Mem. 2464, London 1951) einer eingehenden Kritik und Ergänzung. Mittels der konformen Abbildung $z = c \operatorname{Cos} \zeta$ wird eine geeignete Stromfunktion $\psi(\xi, \eta) = -f(\xi) \sin(\eta - \eta_0)$ als Stromfunktion $\psi(x, y) = k$ in die x - y -Ebene bei Monaghan abgebildet, die für geeignete Wertepaare K_1 und k_2 Kurven liefert, die sich als Randkurven eines gekrümmten Kanals eignen. Für $k = 0$ ergibt sich eine Hyperbel, und Monaghan ist der Meinung, daß es genüge, für die Berandungstromlinien einfach ein solches Wertepaar k_1, k_2 so zu wählen, daß die für obige konforme Abbildung kritischen Brennpunkte außerhalb des gekrümmten Kanals bleiben. Jedes beliebige Paar solcher Stromlinien, die zwischen den beiden Brennpunkten hindurch gehen, könne als Kanalberandungskurven gewählt werden. Hier setzen nun die Betrachtungen des Verf. an, der zeigt, daß für die Konstante k bestimmte Intervallgrenzen gezogen sind, wenn gewissen Forderungen (z. B. kurze, aufeinander senkrecht stehende Kanalschenkel) genügt werden soll. Er gibt Berechnungstabellen für die Stromlinien $\psi(\xi, \eta)$ und $\psi(x, y)$ für bestimmte, innerhalb dieser Grenzen $k_1 = -1.1832$ und $k_2 = 0.8366$ gelegene Werte k an und fügt auch Schaubilder dieser Kurven in beiden Ebenen bei. Die Kurven $\psi(x, y) = k$ der x - y -Ebene eignen sich dann als Kanalberandungen.

K. Karas.

Roždestvenskij, B. L.: Zur Theorie des ebenen Schallrohrs. Žurn. techn. Fiz. 23, 1609—1621 (1953) [Russisch].

The paper studies the conformal mapping $v = d(w : e^{\pi \tau})/\pi$ which performs the complex plane ($v = x + iy$) with two cuts parallel to real axis. $\operatorname{Im}(v) = \pm d$, $x < 0$, in the layer of the plane ($w = \rho + i\psi$) with the conditions $\operatorname{Im}(w) \leq \pi$ or $|\psi| \leq \pi$. This mapping permits to reduce the problem of the exciting of the plane tube to a scalar differential equation with partial derivatives. This differential equation is

$$\partial^2 u / \partial \varphi^2 + \partial^2 u / \partial \psi^2 + (k^2 d^2 / \pi^2) (1 + 2e^\varphi \cos \psi + e^{2\varphi}) u = 0.$$

This equations can be reduced to Whittaker's differential equation, the solution of which is expressed by means of Whittaker functions. The asymptotic behavior of these solutions is shown. The printing is in small letters what is very inconvenient for reading.

D. Rašković.

Vogel, Théodore: Sur la distorsion des fonctions propres dans certains systèmes différentiels troublés. Ann. Fac. Sci. Marseille, II, Sér. 22, 91—100 (1953).

L'A. part du suivant problème de la propagation du son dans une enceinte parallélépipédique à parois rigides et parfaitement réfléchissantes, dans quoi est encastrée une source de vibrations couvrant un rectangle dont les cotés sont parallèles aux arêtes de l'enceinte. Le système différentiel gouvernant le problème est

$$(\Delta_2 - c^{-2} \partial^2 / \partial t^2) \psi = 0 \text{ dans } D; \quad \partial \psi / \partial n = F(P) \text{ sur } S,$$

où ψ est le potentiel des vitesses, D l'intérieur de l'enceinte, S la surface frontière de D , P un point sur S . L'A. ramène ce problème au problème purement spatial et le résout entièrement. Puis il passe au cas du milieu légèrement absorbant, ce qui fait ajouter, dans l'équation de d'Alembert, un terme de la forme $\varepsilon \cdot \chi(x, y, z) \cdot \partial \psi / \partial t$ avec ε très petit. Après la séparation du facteur temporel $e^{i\omega t}$, le problème spatial obtenu est traité comme un état troublé du système, où la perturbation porte sur l'équation différentielle seule. En ce contentant de la première approximation l'A. conclut que la perturbation se traduit par une distorsion de la forme des fonctions propres, lesquelles sont influencées par leurs voisines: cette distorsion est un effet de couplage. Puis l'A. passe aux considérations, qui dépassent le problème particulier traité. Il considère le système différentiel auto-adjoint: $L u - \lambda u = 0$, $U u = 0$, où L est un opérateur différentiel linéaire, λ un paramètre, et U un ensemble de conditions linéaires aux limites. L'A. démontre que si on trouble légèrement le système en remplaçant L par l'opérateur très voisin $L + \varepsilon \tilde{L}$, où ε est un petit paramètre de carré négligeable, l'effet de la perturbation est, en première approximation, 1° de déplacer les valeurs propres $\hat{\lambda}_\nu = \lambda_\nu + \varepsilon (u_\nu, \tilde{L} u_\nu)$, 2° de troubler les fonctions propres en les couplant aux fonctions propres voisines $\tilde{u}_\nu = u_\nu + \varepsilon \sum_{\mu \neq \nu} \frac{(u_\mu, \tilde{L} u_\nu)}{\lambda_\nu - \lambda_\mu} u_\mu$. Puis l'A. analyse la catégorie particulière des perturbations qui n'entraîne aucune modification de la

forme des fonctions propres, qu'il appelle perturbations „sans distorsion“. Il se borne à examiner quelques cas particuliers importants pour la Physique mathématique. Il constate qu'il y a peu de cas où une perturbation non uniforme ne distorde pas les fonctions propres de l'équation d'onde.
C. Orloff.

Vălcovici, V.: Les lignes de courant et les lignes de tourbillon dans le mouvement permanent d'un fluide idéal, barotrope. Acad. Republ. popul. Române, Bul. ști. Sect. Ști. mat. fiz. 5, 147—154, russ. und französ. Zusammenfassg. 153 (1953) [Rumänisch].

On considère le mouvement permanent d'un fluide idéal, barotrope, en mettant en évidence la famille à un paramètre de surfaces rigides S , le long desquelles le fluide s'écoule d'une manière lamellaire, les surfaces S étant en même temps des surfaces de tourbillon. En rapportant ensuite le mouvement à un système de coordonnées trirectangulaires $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, dont la famille des surfaces S est une des trois familles de surfaces coordonnées, aux cas où cela est possible, on construit deux fonctions $q(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $\psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ qui jouent le rôle de la fonction potentielle et, respectivement, celui de la fonction de courant dans le mouvement plan irrotationnel d'un fluide idéal, incompressible: ces fonctions doivent satisfaire aux équations

$$\partial\psi/\partial\alpha_1 = -(h_2 \varrho / h_1 h_3) \partial\varphi/\partial\alpha_2, \quad \partial\psi/\partial\alpha_2 = (h_1 \varrho / h_2 h_3) \partial\varphi/\partial\alpha_1.$$

Par exemple, les dérivées partielles de q par rapport aux variables α_1, α_2 fournissent les composantes de la vitesse du fluide dans les directions α_1, α_2 , multipliée chacune par un paramètre de Lamé. Les lignes de courant situées sur S sont données par l'équation $\psi = \text{const}$ et les lignes de tourbillon par $\partial\psi/\partial\alpha_3 = \text{const}$. Le sens physique de ψ est celui du „flux“ du fluide.

Dan Gh. Ionescu.

Gheorghita, Șt. I.: Le mouvement stationnaire d'un fluide visqueux dans un tube cylindrique dont la section est voisine d'un rectangle. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. București, Ser. Ști. Natur. 2, Nr. 3, 62—64, russ. u. französ. Zusammenfassg. 65 (1953) [Rumänisch].

La section D est un parallélogramme $OABC$, le côté OC coïncidant avec la direction positive de l'axe Oy et le côté OA faisant un angle θ avec la direction positive de l'axe Ox . On suppose θ suffisamment petit pour pouvoir négliger les puissances de $\varepsilon = \tan \theta$ supérieures à l'unité. La vitesse est représentée par une série entière $w = w_0 + \varepsilon w_1 + \dots$, dont on retient les deux premiers termes et, par les relations $u = x, v = y - \varepsilon x$, on passe au plan des variables u, v , où le domaine D devient un rectangle. Les termes w_0 et w_1 sont calculés en employant la fonction de Green pour le rectangle.

Dan. Gh. Ionescu.

Romanenko, S. V.: Die Strömung eines zähen Gases in einer zylindrischen Röhre bei Vorhandensein von konvektivem Wärmeaustausch. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 1289—1292 (1953) [Russisch].

Moisil, Gr. C.: Une décomposition des mouvements plans, lents et non-permanents des liquides visqueux incompressibles. Comun. Acad. Republ. popul. Române 1, 233—237, russ. und französ. Zusammenfassg. 236—237 (1951) [Rumänisch].

L.A. montre que l'expression $p + i(\mu \{ \dot{p} - \varrho \dot{\psi}/\dot{t} \})$ est monogène en $x + iy$, p étant la pression et ψ la fonction de courant. La pression p est une fonction harmonique et ψ satisfait l'équation $1(\mu \{ \dot{p} - \varrho \dot{\psi}/\dot{t} \}) = 0$. Selon un théorème de T. Boggio, la fonction de courant se décompose en une somme $\psi^* + \psi^{**}$, ψ^* étant une fonction harmonique et ψ^{**} une intégrale de l'équation $\mu \{ \dot{\psi}^{**} - \varrho \dot{\psi}^{**}/\dot{t} \} = 0$. Cette décomposition entraîne le théorème suivant: Tout mouvement plan, lent et non permanent d'un liquide visqueux incompressible, se décompose en deux mouvements, l'un irrotationnel, l'autre à pression moyenne constante. — Obs. du Réf. Ce théorème peut être généralisé pour le cas tridimensionnel: La condition d'incompressibilité $\text{div } \vec{v} = 0$ montre qu'on peut introduire le vecteur \vec{W} de composantes A_i , ($i = 1, 2, 3$), et satisfaisant aux relations $\vec{v} = \text{rot } \vec{W}$, $\text{div } \vec{W} = 0$. En introduisant

ces expressions dans le système de Navier-Stokes (linéarisé), on obtient $\Delta p = 0$ et $\Delta(\mu \Delta A_i - \rho \partial A_i / \partial t) = 0$, donc $A_i = A_i^* + A_i^{**}$, ($i = 1, 2, 3$). A_i^* étant une fonction harmonique et A_i^{**} satisfaisant à l'équation $\mu \Delta A_i^{**} - \rho \partial A_i^{**} / \partial t = 0$. Cette décomposition conduit à un théorème analogue au cas plan.

Dan Gh. Ionescu.

Iacobache, M.: Relations entre les tensions dans un liquide visqueux incompressible, en mouvement lent, permanent. Comun. Acad. Republ. popul. Române 1, 245—249, russ. und französ. Zusammenfassg. 248—249 (1951) [Rumänisch].

En employant la méthode des matrices associées due à Gr. C. Moisil (ce Zbl. 49, 73), on cherche les bases des relations différentielles entre la pression, les composantes de la vitesse et les tensions dans un fluide visqueux. On obtient les résultats suivants: 1. Les équations linéarisées de Navier-Stokes et la condition d'incompressibilité $\text{div } \vec{v} = 0$ constituent une base des relations entre les composantes u, v, w de la vitesse \vec{v} et la pression p . 2. Les relations $\text{div } \vec{\tau} = 0$ et $\Delta \omega_x = \Delta \omega_y = \Delta \omega_z = 0$ ($\omega_x = \partial v / \partial y - \partial w / \partial z, \dots$) constituent une base des relations entre u, v, w . 3. Les équations de Cauchy $\partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{xz} / \partial y + \partial \tau_{xy} / \partial z = 0, \dots$ et les relations

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma_x + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma_y + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \sigma_z + 6 \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y \partial z} = 0, \dots$$

et
$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (2 \sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) + 3 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) = 0, \dots$$

constituent une base des relations différentielles entre $\sigma_x, \dots, \tau_{xz}$. Dan Gh. Ionescu.

Wasow, Wolfgang: On small disturbances of plane Couette flow. J. Res. nat. Bur. Standards 51, 195—202 (1953).

In der Arbeit wird speziell die Orr-Sommerfeld-Gleichung für den Fall der ebenen Couette-Strömung untersucht. Es wird ein Fundamentalsystem der Lösungen der Gleichung

$$\Phi^{(4)} - 2\alpha^2 \Phi'' + \alpha^4 \Phi - i\alpha R[(\omega - c)(\Phi'' - \alpha^2 \Phi) - \omega'' \Phi] = 0$$

für den Fall der Couette-Strömung konstruiert, deren asymptotische Eigenschaften für $\alpha R \rightarrow \infty$ auf der ganzen komplexen Ebene η bestimmt werden können (α ist eine Wellenzahl der Disturbanz, R ist eine Reynoldssche Zahl der Grundströmung, η ist eine unabhängige Veränderliche). Weiter wird bewiesen, daß die Disturbanz bei dem gegebenen α stabil ist, wenn αR genügend groß ist. Im letzten Teil der Arbeit werden die Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung $u^{(4)} + \lambda^2 z(u'' + u) = 0$ bei großem Parameter λ in der Umgebung des Punktes $z = 0$ untersucht.

M. Greguš.

Borodin, V. A. und Ju. F. Ditzjakin: Über die Stabilität der ebenen Strömungen einer zähen Flüssigkeit zwischen zwei Wänden. Priklad. Mat. Mech. 17, 569—578 (1953) [Russisch].

In dieser Arbeit untersucht man mittels der Galerkinschen Methode die Stabilität der ebenen Strömungen einer zähen Flüssigkeit zwischen zwei Wänden gegenüber Störungen vom Tollmien-Schlichtingschen Typ. Die verschiedenen Geschwindigkeitsprofile der Grundströmung, die man dabei betrachtet, besitzen zwei im allgemeinen unsymmetrisch liegende Wendepunkte und sind analytisch in Form eines Polynoms vierten Grades dargestellt. Als praktische Möglichkeit für eine Verwirklichung solcher Geschwindigkeitsprofile erwähnt der Verf. die ebenen Diffusoren mit unsymmetrisch verteilten Durchflußmengen. Für die Berechnung der Indifferenzkurven der einzelnen Näherungen werden die Formeln abgeleitet, die die Bestimmung der kritischen Re-Zahlen ermöglichen und die den Einfluß von Profilcharakteristiken auf die Instabilitätsentstehung zeigen. Als Beispiel für das dargestellte Verfahren wird die Stabilität derjenigen ebenen Strömungen untersucht, deren Profile zwei unsymmetrisch liegende Wendepunkte und eine konstante Durchfluß-

menge $Q = 1$ besitzen. Die Berechnungen zeigen, daß die in dieser Arbeit betrachteten Strömungen instabil sind. *V. Saljnikov.*

Geršuni, G. Z.: Über die Stabilität einer ebenen konvektiven Flüssigkeitsbewegung. *Žurn. techn. Fiz.* **23**, 1838—1844 (1953) [Russisch].

Es handelt sich um eine Näherungslösung zur Bestimmung der Bedingungen für die Stabilität einer ebenen, stationären, konvektiven Flüssigkeitsbewegung zwischen zwei planparallelen Platten, erwärmt auf verschiedene Temperaturen, oben und unten abgeschlossen, sowie um die Feststellung kritischer Werte der Grashof'schen Zahl für die Stabilität. Ausgehend von den üblichen Differentialgleichungen und den Randbedingungen erhält der Verf. mit Hilfe der bekannten Berechnungsmethoden folgende Gleichungen

$$q^{IV} q'' (i\omega + 2K^2 + iKv_0) - q(i\omega K^2 - K^4 + iK^3 v_0 - iKv_0'') - Gr\theta' = 0$$

$$ikT_0' \varphi - C\theta'' + \theta(i\omega + ikv_0 + Ck^2) = 0$$

wo, wie allgemein, für die Störungen $\varphi = q(x) e^{i(\omega t + Kz)}$ und $T = \theta(x) e^{i(\omega t + Kz)}$ angenommen sei. In den obigen Gleichungen sei v die Geschwindigkeit, T die Temperatur, ψ die Strömungsfunktion ($v_x = d\psi/dz$ und $v_z = -d\psi/dx$), k die reale Zahl, ω die imaginäre Frequenz und $c = 1$ Pr. Für die Näherungslösung dieser Gleichungen benützt der Verf. die Methode von Galerkin (L. B. Kantorovič und V. I. Krylov, Näherungsmethoden der höheren Analysis, dies. Zbl. **40**, 215). Laut dieser Methode wird die gewünschte Funktion als endliche Summe von Funktionen dargestellt, welche die Randbedingungen mit Koeffizienten erfüllen, die nach gewissen Regeln so zu bestimmen sind, daß die lineare Kombination möglichst am besten die strenge Lösung approximiert. Am Ende des Referates analysiert der Verf. die durch die Lösung erhaltenen Resultate. *W. Iwanow.*

Hopf, E. and E. W. Titt: On certain special solutions of the Φ -equation of statistical hydrodynamics. *J. rat. Mech. Analysis* **2**, 587—591 (1953).

Der Zweck dieser Note ist lediglich, einige Bemerkungen aus der Arbeit von E. Hopf: „Statistical hydromechanics and functional calculus“ (dies. Zbl. **49**, 417) zu überprüfen und zu erweitern. Eine Lösung der darin auftretenden Funktional-Differentialgleichung für das charakteristische Funktional einer Phasenverteilung ist im Falle stationärer Turbulenz und verschwindender Viskosität (*) $\Phi = W[Q(z(k))]$ mit einer beliebigen zweimal stetig differenzierbaren Funktion $W(\xi)$, $\xi \geq 0$ und $Q =$

$$\int_K \pi_{\alpha\beta}(k) z_\alpha(k) z_\beta(-k) dk, \quad \pi_{\alpha\beta}(k) = \delta_{\alpha\beta} - \left(\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \quad (\delta \text{ ist das Kroneckersymbol}).$$

Für jede solche Lösung ist die Energiedichte $f(k)$ konstant. Da das dem Kolmogoroff'schen Gesetz $f = c k^{-11/3}$ widerspricht, stellten die Verff. die Frage auf, ob die Funktional-Differentialgleichung im obigen Fall eine andere Lösung (*) besitzt mit geeignetem W und Q . Sie bewiesen, daß sich bei $Q = \int_K F_{\alpha\beta}(k) z_\alpha(k) z_\beta(-k) dk$, $F_{\alpha\beta}(k) = \pi_{\alpha\beta}(k) f(k)$, $W''' = 0$ wieder $f = \text{konst.}$, d. h. nur die obige Lösung ergibt. *E. Hölder, W. Gähler.*

Chuang, Feng-Kan: On the decay of turbulence. *Acta sci. Sinica* **2**, 187—200 (1953).

Verf. bemüht sich im ersten Teil der Arbeit um eine Erweiterung des von Kolmogoroff angegebenen Abklinggesetzes. Dabei tritt eine Integrationskonstante auf, die sich im Gegensatz zu der entsprechenden Theorie von Lin positiv statt negativ ergibt. Im zweiten Teil werden allgemeine Ähnlichkeitbetrachtungen zur isotropen Turbulenz durchgeführt, wobei die von Sedov für die Korrelationskoeffizienten benutzte Methode auf das Spektrum angewendet wird. Es ergeben sich Aussagen für den Übergang von der Anfangs- in die Endperiode des Abklingens. *F. W. Riegels.*

Litwiniszyn, Jerzy: On a certain problem of the two-dimensional turbulent flow. *Arch. Mech. stosow.* **5**, 273—288, engl. Zusammenfassg. 289—290 (1953) [Polnisch].

Verf. schlägt neue, von den Reynoldsschen verschiedene Beziehungen zwischen den Geschwindigkeitskomponenten der Grund- und der Nebenströmung vor. Die Beziehungen werden auf rein geometrischem Wege erhalten, und die Klasse der die Geschwindigkeitsfelder beschreibenden Funktionen ist nicht so eingeschränkt wie im Falle der Reynoldsschen Voraussetzungen. Jedem Punkt im betrachteten Bereich wird in jedem Zeitpunkt ein Vektorenpaar zugeordnet. Wenn diesem Vektorenpaar zwei Stromlinien angepaßt werden können, so wird das Vektorenpaar als metro-holonom bezeichnet. Aus der Metro-Holonomie der Geschwindigkeitskomponenten der Haupt- und der Nebenströmung sowie aus den hydrodynamischen Grundgleichungen können Folgerungen physikalischer Natur gezogen werden. Verf. erhält z. B. im Falle einer zweidimensionalen turbulenten Strömung eine Gleichung von parabolischem Typus, die mit der Gleichung für Wärmeausbreitung identisch ist.

F. Labisch.

Ananjan, A. K.: Die Bewegungsgleichungen einer turbulenten Strömung an einer Biegung der Wasserleitung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 633—636 (1953) [Russisch].

Unter Zugrundelegung einer turbulenten Kernströmung im gekrümmten Rohre werden zunächst die drei partiellen Differentialgleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten U_θ in der Längsrichtung, U_R in der radialen und U_z in der tangentialen Richtung angeschrieben, die zusammen mit der Kontinuitätsgleichung und der für den nur ortsabhängigen Koeffizienten A der turbulenten Zähigkeit auch diesen und den Strömungsdruck p grundsätzlich zu bestimmen gestatten. Um eine wirklichkeitsnahe Vereinfachung dieser nicht linearen Gleichungen zu erreichen, nimmt Verf. a) im gekrümmten Rohrteil eine achsensymmetrische Strömung an, b) setzt er voraus, daß alle Geschwindigkeitskomponenten im gekrümmten Teil der Leitung und auch der Koeffizient A der turbulenten Zähigkeit mit der Annäherung $\sigma(1/R)$ (R = Krümmungshalbmesser der Stromlinien im gekrümmten Rohrteil) eine Funktion der Verteilung $U(r, z)$ der Längsgeschwindigkeit im geraden Teil der Leitung ist. Alle Terme mit $1/R^2$ werden somit vernachlässigt. Dadurch gelingt es ihm, aus der ersten und dritten der oben vermerkten partiellen Differentialgleichungen eine ebensolche, aber lineare Gleichung für die Funktion $F(R, z)$ der Querkirkulation herzuleiten, deren Lösung mit Beachtung der üblichen Randbedingungen (eventuell genauer unter der weiteren Annahme einer laminaren Grenzschicht an der Rohrwandung und Berücksichtigung der dann zusätzlich hinzutretenden Übergangsbedingungen zwischen dieser Grenzschicht und dem turbulenten Kern), nach den direkten Methoden der Variationsrechnung (Galerkin) erfolgen kann; dann ist:

$$U_R = (-1/R)(\partial F / \partial z); \quad U_z = (1/R)(\partial F / \partial R),$$

während die zweite der oben genannten partiellen Differentialgleichungen unter den erwähnten Voraussetzungen ebenso zu einer linearen, inhomogenen Gleichung für die Verteilung der Längsgeschwindigkeiten im gekrümmten Rohrteil führt, falls man dieselbe im geraden Rohrteil kennt. Die Lösung dieser Gleichung kann nach der Methode der schrittweisen Näherung erfolgen. Verf. führt weder die Galerkinsche, noch die iterative Lösung tatsächlich durch, behauptet aber, daß ein Vergleich dieser Rechnungsergebnisse für Leitungen mit kreisrundem und rechteckigem Querschnitt mit denen des Versuches gute Übereinstimmung ergeben habe. (A. K. Ananjan, Doktor-Dissertation 1952).

K. Karas.

Łitwiniszyn, Jerzy: Differential-integral equations of motion of a deformable fluid mass bounded by a surface subjected to stresses. Arch. Mech. stosow. 5, 15—20, engl. Zusammenfassg. 20 (1953) [Polnisch].

The paper contains a standard derivation of standard equations of motion of an continuous medium, by using some unstandard nomenclature. *S. Drobot.*

Pratelli, Aldo M.: Principi variazionali nella meccanica dei fluidi. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. **86**, 484—500 (1953).

Viene esteso ai fluidi comprimibili il principio di Thomson per i liquidi, mostrando come il minimo dell'energia cinetica contraddistingue (a parità di distribuzione di densità) il moto irrotazionale tra tutti i movimenti che soddisfano alle stesse condizioni al contorno e, nel caso di moto stazionario, tra tutti i moti di egual portata. Il principio di conservazione della massa di un liquido vien dedotto dal principio di Dirichlet; infine dal minimo di un'opportuna formazione integrale si deducono l'esistenza del potenziale cinetico e il principio di conservazione della massa dei fluidi.

Dan Gh. Ionescu.

Iacob, Caius: Sur les écoulements subsoniques, à circulation, des fluides compressibles. Comun. Acad. Republ. popul. Române **1**, 741—746, russ. und französ. Zusammenfassg. 745 (1951) [Rumänisch].

L'A. reprend la méthode hodographique d'approximations successives développée dans ses travaux antérieurs (Mathematica, Timisoara, **22**, 170—181 (1946); C. r. acad. Sci. Paris, **222**, 1329 (1946)] en l'adaptant aux écoulements à circulation donnée. L'établissement d'une correspondance entre l'écoulement compressible du plan z et un écoulement incompressible du plan ζ conduit à une formule générale qui contient deux fonctions holomorphes presque arbitraires. En particulierisant cette formule l'A. retrouve les termes en M_0^2 de la solution donnée par J. Leray qui a étudié le même problème avec une autre méthode (ce Zbl. **34**, 272). Simona Popp.

Carafoli, E. et B. Horovitz: L'écoulement supersonique autour d'une aile triangulaire à disques marginaux. Comun. Acad. Republ. popul. Române **3**, 395—404, russ. und französ. Zusammenfassg. 403—404 (1953) [Rumänisch].

Dans cette Note, on étudie l'écoulement autour d'une aile triangulaire pourvue de disques marginaux. L'aile étant située, totalement ou partiellement, dans le cône de Mach. Par les transformations conformes

$$Bx_1 = \frac{2\zeta}{1-\zeta^2}, \quad X^2 = r_1^2 - h_1^2, \quad X_1 = X + \frac{L-h_1}{2} - \frac{h_1+L}{4} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$$

le problème revient à déterminer la fonction $f = u + iu'$ (u étant la composante axiale de la vitesse de perturbation), holomorphe à l'extérieur d'un cercle, de rayon égal à l'unité, avec certaines conditions données sur le contour. En appliquant l'analogie hydrodynamique (v. E. Carafoli, ce Zbl. **83**, 418) on obtient les expressions de la fonction $f = u + iu'$, dans les différents cas étudiés

$$j(\zeta) = i \left[M \left(\frac{e^{i\tau}}{\zeta - e^{i\tau}} + \frac{e^{-i\tau}}{\zeta - e^{-i\tau}} \right) + \frac{m}{\zeta + 1} \right], \quad f_1 = \frac{q}{|x'^2 + h^2},$$

$$f = \frac{i u_\sigma}{\pi} \log \frac{\zeta + \gamma_\sigma}{\zeta + 1/\gamma_\sigma} = i M \left[\frac{e^{i\tau}}{\zeta - e^{i\tau}} + \frac{e^{-i\tau}}{\zeta - e^{-i\tau}} \right], \quad f_1 = \frac{h^2 U_\infty \gamma}{E(1 - B^2 h^2)} \cdot \frac{1}{|x'^2 + h^2},$$

$$f = -\frac{i u_\sigma}{\pi} \log \frac{X_1 - i x'}{X_1 + i x'} + M \left[\frac{1}{X_1 - L} + \frac{1}{X_1 + L} \right] + u_\sigma.$$

[Französ. Zusammenfassg.]

Sagomonjan, A. Ja.: Die Charakteristikenmethode für eine nichtstationäre axialsymmetrische selbstähnliche Flüssigkeitsbewegung. Vestnik Moskovsk Univ. **8**, Nr. 12 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 8) 63—68 (1953) [Russisch].

Die Bewegungsgleichungen für die adiabatische axialsymmetrische (in bezug auf die x -Achse) und potentielle Strömung einer nichtzähen Flüssigkeit werden im Falle der „Selbstähnlichkeit“, d. h. wenn die Geschwindigkeit und die Dichte nur von den Parametern $\xi = x/t$, $\eta = y/t$ abhängen und für das Geschwindigkeitspotential die Formel $q(x, y, t) = t \varphi(\xi, \eta)$ gilt, auf eine partielle Differentialgleichung für q zurückgeführt. Die Charakteristiken dieser Gleichung werden zunächst für die

linearisierte und dann für nichtlinearisierte Strömung untersucht. In dem Realitätsbereich dieser Charakteristiken werden drei Typen von Randwertaufgaben gelöst, mit deren Hilfe oftmals allgemeinere Aufgaben gelöst werden können. *S. Drobot.*

Legras, J.: Nouvelles applications de la méthode de Lighthill à l'étude des ondes de choc. Office nat. Étud. Rech. aéronaut., Publ. Nr. 66. 62 p. (1953).

Die Methode von Lighthill zur Integration der Gleichung $(x + \alpha y) dy/dx + y = 1$ ($\alpha \ll 1$) in der Nähe von $x = 0$ (dies. Zbl. 35, 205) wird auf zwei gasdynamische Probleme angewendet: 1. Verhalten von Stoßwellen in einer ebenen Strömung weit entfernt von dem sie erzeugenden und als dünn vorausgesetzten Profil. Die erste Näherung gibt hier schon genügend gute Resultate, wobei die erste Näherung nicht mit der linearen Näherung übereinstimmt, sondern erste Näherung einer einfachen Welle ist. (vgl. auch Whitham, dies. Zbl. 47, 191). 2. Komische Strömungen. Es wird ein angestellter ebener Rechteckflügel untersucht, dessen eine Kante parallel zur Strömungsrichtung ist. Besonderes Augenmerk wird auf die Punkte gelegt, in denen sich die von der Kante und von der Ecke ausgehenden Wellen treffen (vgl. auch Lighthill, dies. Zbl. 37, 119). *C. Heinz.*

● **Ghizzetti, Aldo: Calcul des conduites d'eau avec cheminées d'équilibre.** Traduit de l'italien par Angelo Poli. (Manuels de Calculs Techniques. Vol. I.) Paris: Gauthier-Villars 1953. X, 78 p., 15 fig. et diagr. 960 fr.

Jedes Heft dieser neuen Buchreihe, die den Zweck hat, dem Praktiker die für seine Arbeit notwendigen Unterlagen in Form von Tabellen und Diagrammen bereit zu stellen, soll ein Teilgebiet der Technik behandeln. Der vorliegende erste Band liefert die Tabellen und Kurvenblätter zur Berechnung der Schwingungen des Wasserspiegels in einem Schachtwasserschloß. Der erste Teil behandelt den Fall des konstanten Schachtquerschnittes, wobei eine nichtlineare Schwingungsgleichung entsteht, die in dimensionsloser Schreibweise nur einen Parameter enthält. Diese wird nicht allgemein gelöst, sondern durch Reihenentwicklung werden Tabellen hergeleitet, mit denen man von einem Wendepunkt ausgehend die Höhe und Zeit des vorhergehenden und folgenden Maximums oder Minimums bestimmen kann. Damit erlauben die Tabellen die laufende Berechnung der Schwingungsamplituden im Wasserschloß. Je nach der Größe der beiden auftretenden Parameter (Parameter der Differentialgleichung und Anfangswert) müssen mehrere Fälle unterschieden werden; für jeden dieser Fälle wird die Lösungsmethode angegeben und ein Beispiel durchgerechnet. Umgekehrt kann man die Tabellen, die im Anhang auch noch graphisch dargestellt sind, zur Dimensionierung solcher Wasserschlosser benutzen. — Der zweite Teil geht auf die Berechnung bei veränderlichem Schachtquerschnitt ein. Ist dieser stückweise konstant, so lassen sich wieder die Tabellen benutzen, andernfalls ist man auf die bekannten Methoden der praktischen Mathematik (Runge-Kutta u. a.) angewiesen. *H. Molitz.*

Beljakova, V. K.: Die ebene Aufgabe der Formänderung der freien Oberfläche des Grundwassers bei Berücksichtigung der Infiltration. Priklad. Mat. Mech. 17, 373—376 (1953) [Russisch].

Es wird eine neue Lösung der Aufgabe einer ebenen Formänderung der freien Oberfläche des Grundwassers während und nach der Feldberegung unter Berücksichtigung der Infiltration angegeben. Mittels dieser Lösung werden die Formeln der freien Oberfläche und des Geschwindigkeitspotentials für eine durchlässige Bodenschicht mit unendlicher Tiefe, sowie für eine mit geringer Tiefe auf undurchdringlichem waagerechtem Grund lagernde Schicht angegeben. *M. Lates.*

Kočina, N. N.: Einige Fragen des räumlichen Auseinanderfließens des Grundwassers. Priklad. Mat. Mech. 17, 377—381 (1953). [Russisch].

Es wird ein allgemeiner Ausdruck des räumlichen Auseinanderfließens der während der Beregung erscheinenden hügelförmigen Grundwasseroberfläche abgeleitet (Voraussetzung: unendliche Tiefe des durchlässigen Bodens). Als konkrete Beispiele werden folgende Aufgaben gelöst: hügelförmige Grundwasseroberfläche mit rechteckiger und kreisförmiger Grundlage, wellenförmige Grundwasseroberfläche (regelmäßig berechnete Oberflächen mit regelmäßig unberechneten Zwischenflächen). Endlich wird auch der Ausdruck des räumlichen Auseinanderfließens hügelförmiger Grundwasseroberflächen unter Berücksichtigung der Verdunstung behandelt. *M. Lates.*

Lunc, M. et A. Szaniawski: La théorie de la propulsion hydraulique à réaction, à deux fluides. Arch. Mech. stosow. 5, 499—513, russ. und französ. Zusammenfassg. 514—516 (1953) [Polnisch].

The coefficient of the useful power of an impuls duct water engine has been calculated under certain simplifying assumptions. No references are given.

S. Drobot.

Jarzyna, H. et M. Lunc: La dynamique^V des aérosols. Arch. Mech. stosow. 5, 311—326, russ. und französ. Zusammenfassg. 327—328 (1953) [Polnisch].

The authors give an elementary theory of an one dimensional flow of an "aerosol" however under such assumptions that there is no essential difference between this "aerosol" and a gas. No references are given.

S. Drobot.

Escande, Léopold et Roger Huron: Oscillations, dans deux chambres d'équilibre placés sur les systèmes d'amenée et de fuite d'une usine. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 1329—1331 (1953).

Barenblatt, G. I.: Über eine Klasse von genauen Lösungen der ebenen eindimensionalen Aufgabe der instationären Filtration eines Gases in einem porösen Medium. Priklad. Mat. Mech. 17, 739—742 (1953) [Russisch].

Dans le cas d'un mouvement non-permanent et rectiligne d'un gaz dans le milieu poreux la densité $q(x, t)$ satisfait à l'équation de Leibensohn $\partial q / \partial t = -a^2 c^2 q(q) c^2$, où a^2 est une constante déterminée par les propriétés de gaz et de milieu poreux et où $q(q) = \int_0^q q dp$. On connaît plusieurs solutions de cette équation

qui correspondent à des formes spéciales de la fonction $q(q)$. L'A. considère le cas général et forme une classe des solutions à l'aide d'une quadrature. En supposant que q est une fonction de $x - ct$, avec c constant, on obtient un mouvement qui correspond à une translation de la courbe $q(x, t)$ dans la direction de l'axe des x .

C. Woronetz.

Vasilache, S.: Sur le mouvement d'un fluide incompressible dans un cylindre poreux semi-infini. Commun. Acad. Republ. popul. Române 1, 331—334, russ. und französ. Zusammenfassg. 335—336 (1951) [Rumänisch].

L'A. étudie le mouvement stationnaire d'un fluide incompressible dans un cylindre poreux semi-infini, en admettant la loi de Darcy: $\vec{v} = \chi \text{ grad } p$ et en prenant pour χ l'expression $D \exp(-kz)$, où $k = \text{const}$ positive. L'axe du cylindre est parallèle à Oz . Les conditions aux limites sont: $p = f(r)$ pour $z = 0$, avec $f(r)$ bornée et intégrable pour $0 \leq r \leq a$ et $p_r = 0$ pour $r = 0$ et $r = a$. La solution est obtenue par un développement en série suivant les fonctions de Bessel d'ordre zéro.

C. Iacob.

Vasilache, S.: Sur le mouvement d'un fluide incompressible dans un cylindre poreux d'une longueur finie. Commun. Acad. Republ. popul. Române 1, 551—555, russ. und französ. Zusammenfassg. 554—555 (1951) [Rumänisch].

Le cylindre circulaire considéré est à génératrices parallèles à Oz . Il est rempli par un milieu poreux de coefficient de filtration $\chi = D \exp(-2\beta z)$, D et β étant des constantes. Les bases du cylindre sont perméables tandis que la surface latérale est imperméable. En passant aux coordonnées cylindriques, le problème de filtration à travers le cylindre revient à résoudre l'équation $p_{zz} + p_{rr} + r^{-1} p_r - 2\beta p_z = 0$ avec les conditions: $p = f(r)$ pour $z = 0$, $p = g(r)$ pour $z = l$, $p_r = 0$ pour $r = 0$, $r = a$, $f(r)$ et $g(r)$ étant bornées et intégrables. L'expression de $p(r, z)$ s'obtient sous forme de série après avoir opéré une séparation des variables.

C. Iacob.

Goldstein, S.: On the mathematics of exchange processes in fixed columns. I: Mathematical solutions and asymptotic expansions. II: The equilibrium theory as the limit of the kinetic theory. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 219, 151—171, 171—185 (1953).

I. The author discusses the exchange processes arising in a fixed column when a fluid flows through pores of a matter in the solid state contained in the

column. These problems may be realised e.g. by heat or ion exchange and adsorption processes. The author gives an operational solution of the equations, without discussing their derivation. After interpreting the operational form of the solution, he discusses in detail the function $J(x, y)$ introduced by Hiester and Vermeulen [Chem. Engin. Progr. 48, 505—516 (1952)]. He gives the integral representations and asymptotic expansions of $J(x, y)$ and finally mentions some of its applications in the two-dimensional diffusion problem with circular symmetry and in the equation of telegraphy. — II. The author develops the mathematical solutions of the equilibrium theory for certain initial conditions of exchange processes discussed in part I and shows that these solutions are limits of the corresponding solutions of the kinetic theory obtained in part I. *G. Adler.*

Polubarinova-Kočina, P. Ja.: Über die stationäre Filtration eines Gases in einem Kohlenflöz. Priklad. Mat. Mech. 17, 735—738 (1953) [Russisch].

L'A. mentionne que la filtration d'un gaz dans une couche poreuse est suivie par la formation des pellicules contenant des molécules condensées. Le rôle que joue cette masse condensée dans le mouvement de gaz n'est pas négligeable si la grandeur des pores est petite. L'A. généralise l'équation classique de filtration en calculant les termes complémentaires qui tiennent compte des phénomènes observés.

C. Woronetz.

Ostapenko, V. N.: Die Filtration in einem fast homogenen Medium. Ukrain. mat. žurn. 5, 350—353 (1953) [Russisch].

Im vorliegenden Artikel wird der Einfluß der Inhomogenität eines wasserundurchlässigen Mediums auf die Lösungsgenauigkeit von Filtrationsaufgaben untersucht und es werden einige Bedingungen festgestellt, bei deren Erfüllung das Medium als praktisch homogen gelten kann.

Aus der Einleitung.

Čarnyj, I. A.: Über eine Integralbeziehung und ihre Anwendung zur Lösung gewisser Aufgaben der druckfreien Filtration. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 251—254 (1953) [Russisch].

Dmitriev, A. A.: Die durch eine pulsierende Quelle hervorgerufenen Wellen auf der Oberfläche einer zähen Flüssigkeit. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. geofiz. 1953, 335—345 (1953) [Russisch].

L'A. pose les équations linéarisées de Stokes déterminant le mouvement plan nonpermanent d'un fluide visqueux incompressible et les applique à l'étude d'un mouvement ondulatoire provoqué par une source de débit variable $Q \cos \sigma t$, posée sous la surface de l'eau. On simplifie les conditions aux limites en admettant que la tension superficielle est négligeable et que l'inclinaison des ondes est petite. En supposant que les projections (horizontale et verticale) de la vitesse peuvent être mises sous la forme: $u = c q / \partial x - \partial \psi / \partial z$, $w = - \partial q / \partial z - c \psi / \partial x$ l'A. obtient les équations $\Delta q = 0$ et $\partial \psi / \partial t = \gamma \Delta \psi$ déterminant les fonctions q et ψ . Après avoir effectué une analyse détaillée des solutions obtenues, l'A. se retient spécialement sur l'amortissement des ondes à une grande distance de la source dans le cas d'une faible viscosité de l'eau.

C. Woronetz.

Heins, Albert E.: On gravity waves. Fluid Dynamics, Proc. Sympos. appl. Math. 4, 75—86 (1953).

Es wird eine Übersicht gegeben über Probleme der linearisierten Theorie der Wasserwellen, welche in den Jahren vor 1953 gelöst wurden. Insbesondere geht Verf. ein auf den Fall voll eingetauchter, horizontal ausgedehnter Hindernisse und auf das Zusammentreffen freier Oberflächen mit verschiedenen Konstanten in der linearen Grenzbedingung (Dockproblem, schwimmende Matte) auf endlich und unendlich tiefem Wasser. Für den ersten Fall wird eine Faltungsintegralgleichung mit semi-infinitym Grundgebiet hergeleitet und diskutiert.

K. Eggers.

Kostjukov, A. A.: Zur Frage der Wellenbildung bei der Bewegung eines Schiffes. Priklad. Mat. Mech. 17, 275—284 (1953) [Russisch].

Untersuchungen von Kotschin („On Wave-Making Resistance and Lift of Bodies Submerged in Water“, New York 1951) zur Bestimmung der Oberflächenquellbelegung eines voll eingetauchten, bewegten Körpers werden ausgedehnt auf den Fall schwimmender Schiffskörper, insbesondere für extrem große und extrem kleine Geschwindigkeitsparameter. Es wird eine konvergente Entwicklung zur Belegungsintensität durch Iteration angegeben. Am Beispiel eines schiffsähnlichen Parabelzylinders, der in Tiefenrichtung unbeschränkt ausgedehnt ist, wird die Abhängigkeit der Belegung der Mittschiffsebene vom Breiten-Längenverhältnis für kleine Geschwindigkeit dargestellt. Für das Wellenbild bei sehr großer Geschwindigkeit ergibt sich, daß die Wellenerhebung überall positiv ist. *K. Eggert.*

Wärmelehre:

Śrivastava, B. N. and R. P. Rastogi: Thermodynamics of systems of any number of components. Proc. nat. Inst. Sci. India 19, 613—622 (1953).

Es werden gemischte Flüssigkeiten im Austausch mit einer gemischten Gasphase betrachtet, wobei chemische und elektrolitische Änderungen ausgeschlossen sein sollen. Die Anzahl der Komponenten ist nicht beschränkt. Aus der Gibbschen Funktion werden die zur Erhaltung des Gleichgewichts nötigen Beziehungen zwischen den Änderungen des Druckes, der Temperatur und der Konzentrationen der Komponenten abgeleitet, wobei wie üblich dann das Volumen der Flüssigkeit gegen das der Gasphase vernachlässigt wird. Dann werden die Vereinfachungen ausgenutzt, die sich ergeben, wenn die Gasphase als ideal gelten darf. Zum Schluß wird auch noch die Flüssigkeit als ideale Mischung angenommen, wobei dann die von Fowler und Guggenheim (Statistical Thermodynamics, Cambridge 1952) aufgestellten Ausdrücke für die chemischen Potentiale auf die bekannten Gesetze von Raoult, Clausius-Clapeyron und Vant'Hoff führen. *U. T. Böderadt.*

Ginzburg (Ginsburg), V. (W.) L.: Einige Probleme aus der Theorie der elektrischen Schwingungserscheinungen. Fortschr. Phys. 1, 51—87 (1953). Übersetz. aus Uspechi fiz. Nauk 46, 348 ff (1952).

This paper reviews the derivation of the classical Nyquist formula (§ 1), and recent work on its quantum mechanical extensions (§§ 2). It also deals with the question of the applicability of thermodynamic methods in the treatment of electrical fluctuation phenomena (§ 3), and with electrical fluctuations when the system is near a Curie point, as in ferromagnetics and in superconductors (§ 4). In § 2, arguments which are alternative to those of Callen and Welton (this Zbl. 44, 412) are considered, and in § 3 the work of G. S. Gorelik [Uspechi fiz. Nauk 44, 33 (1951)] is discussed extensively. Among other matters the author's own work is reviewed in the concluding section. *P. T. Landsberg.*

Juncosa, M. L. and D. M. Young: On the order of convergence of solutions of a difference equation to a solution of the diffusion equation. J. Soc. industr. appl. Math. 1, 111—135 (1953).

L'application de la méthode de Bernoulli-Fourier pour la recherche d'une solution de l'équation (1) $u_t = u_{xx}$ satisfaisant aux conditions (2) $u(x, 0+) = f(x)$ pour $0 \leq x \leq 1$, $u(0+, t) = u(1-, t) = 0$ pour $t \geq 0$ conduit au développement

$$(3) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n \pi x,$$

avec (4) $a_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n \pi x dx$. La série (3) converge vers la solution du problème si la fonction $f(x)$ satisfait aux conditions convenables (bien connues). On fait correspondre à (1) l'équation aux différences finies

(5) $U_M(x, t+1) - U_M(x, t) = r [U_M(x+1, t) + U_M(x-1, t) - 2U_M(x, t)]$ où l'on a $r = M(1-x)^2$, $1-x = 1/M$, le nombre M étant entier, positif. Les A.A. ont démontré (ce Zbl. 55, 86) que $f(x)$ étant une fonction continue sauf au plus à un nombre fini de points, où elle admet des sauts finis (cette hypothèse reste valable dans le travail référé), la solution de (5) satisfaisant aux conditions.

(6) $U_M(x, 0) = f(x)$ pour $x = h/M$ ($h = 1, 2, \dots, M-1$),
 $U_M(0, t) = U_M(1, t) = 0$ pour $t \geq 0$,

converge uniformément pour $0 \leq x \leq 1$, $t \geq t_0 > 0$ vers la fonction $u(x, t)$ définie par (3) si l'on a $0 < r \leq \frac{1}{2}$. Dans le présent travail les A.A. estiment l'ordre de la convergence des solutions de (5) satisfaisant aux conditions (6) vers la fonction $u(x, t)$ définie par (3) pour $0 \leq x \leq 1$,

$t \geq t_0 > 0$. On suppose dans le présent travail que l'on a $0 < r \leq \frac{1}{2}$, $f(0) = f(1) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]$ aux points de discontinuité de $f(x)$. On pose

$$E(M, t_0) = \sup_{(x, t) \in R^*} |U_M(x, t) - u(x, t)|$$

où $u(x, t)$ est définie par (3) et R^* est l'ensemble de points (x, t) constituant les noeuds de réseau, tels que x, M et tM^2/r soient des nombres entiers positifs, $0 \leq x \leq 1$, $t \geq t_0 > 0$. Les AA. démontrent plusieurs théorèmes estimant l'ordre de $E(M, t_0)$ relativement aux puissances de M^{-1} . En particulier, s'il existe une suite $\{\varepsilon_N\}$ de nombres positifs tendant vers zéro et une suite

de polynômes trigonométriques $S_N = \sum_{n=1}^N A_{N,n} \sin n\pi x$, telle que l'on ait $|f(x) - S_N(x)| \leq \varepsilon_N$

pour $0 \leq x \leq 1$, et si l'on a, pour $N = [M^3]$, $\varepsilon_N = O(M^{-2})$, on a $E(M, t_0) = O(M^{-2})$. S'il existe deux nombres $K > 0$ et $\gamma > 1$ tels que l'on ait $|a_n| < K n^{-\gamma}$ ($n = 1, 2, \dots$), a_n étant définies par (4), on a $E(M, t_0) = O(M^{-\alpha})$ où $\alpha = \min(2, \gamma)$. Si $f(x)$ est continue pour $0 \leq x \leq 1$, admettant la dérivée $f'(x)$ sauf à un nombre fini de points et si $f'(x)$ est à variation bornée pour $0 \leq x \leq 1$, on a $E(M, t_0) = O(M^{-2})$. Si la fonction $f(x)$ satisfait à la condition de Hölder d'ordre α ($0 \leq \alpha \leq 1$) pour $0 \leq x \leq 1$, on a $E(M, t_0) = O(M^{-\alpha})$. Si la fonction $f(x)$ est à variation bornée pour $0 \leq x \leq 1$, on a $E(M, t_0) = O(M^{-1})$.

M. Krzyżański.

Elektrodynamik. Optik:

Infeld, L.: Über die jüngste Entwicklung der klassischen Elektrodynamik. Fortschr. Phys. 1, 88—98 (1953).

This is a review article referring to series of works of the author and his collaborators and to those of Dirac. The author fully recognizes the great success of the Maxwell-Lorentz theory, but he points out some of its drawbacks: 1. the electromagnetic potentials have no direct physical meaning, 2. the theory affords no knowledge about the structure of the electron and its finite energy, and 3. no proper laws of motion for electrons are available. The difficulty (1) can be removed by suitably modifying the formulation. Then the non-linear electrodynamics of Born and Infeld and the new electrodynamics of Dirac are discussed, both of them being attempts to go beyond the Maxwell-Lorentz theory. The former gives a model of the electron structure and its energy, thus overcoming the difficulty (2). The latter gives, on the other hand, the laws of motion for a small electron cloud, thus eliminating the difficulty (3). The author further describes the electrodynamics without potential, which was recently developed by the author and Plebański. They start with electromagnetic fields and define charge-current by the derivatives of the fields, and the variation principle yields field equations. These are given in terms of pure field-language, but the same result can be expressed in terms of particle-language, by introducing a vector related to the charge-current. This theory is quite general and includes the Born-Infeld theory and the Dirac theory as special cases.

Z. Koba.

Ștefănescu, Sabba S.: Le champ magnetique des Courants électriques stationnaires dans les milieux hétérogènes. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Ști., Sect. Ști. mat. fiz. 5, 199—206, russ. und französ. Zusammenfassg. 204—206 (1953) [Rumänisch].

Die heterogenen Medien werden durch eine ortsabhängige Leitfähigkeit σ gekennzeichnet, für die der Ausdruck angenommen wird

$$\sqrt{\sigma(x, y, z)} = B + \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{R_i},$$

wobei R_i die Abstände des Aufpunktes (x, y, z) von in den Punkten (x_i, y_i, z_i) gedachten „Zentren der Leitfähigkeit“ sind (Stromquellen mit Stromdichte unendlich). Für eine solche Verteilung der Leitfähigkeit kann mit elementaren mathematischen Methoden der elektrische Potentialverlauf und auch der Verlauf der magnetischen Feldlinien berechnet werden.

D. Kamke.

Nicolau, Edmond: Les relations différentielles linéaires entre les équations des potentiels du champ électromagnétique. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. București, Ser. Ști. Natur. 2, Nr. 3, 148—154, russ. u. französ. Zusammenfassg. 154—155 (1953) [Rumänisch].

En appliquant la méthode donnée par Gr. C. Moisil en „Matricele asociate sistemelor de ecuații cu derivate parțiale“ (București 1950), l'A. établit les relations différentielles linéaires qui existent entre les huit équations $E_1 = E_2 = \dots$

... $E_8 = 0$ (1) des potentiels et antipotentisls électromagnétiques dans des milieux des diélectriques parfaits, c'est-à-dire :

$$R_1 \equiv \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} - \mu \varepsilon \frac{\partial E_4}{\partial t} = 0 \quad R_2 \equiv \frac{\partial E_5}{\partial x} + \frac{\partial E_6}{\partial y} + \frac{\partial E_7}{\partial z} - \mu \varepsilon \frac{\partial E_8}{\partial t} = 0.$$

Toute relation différentielle linéaire entre les équations de (1) a la forme $A R_1 + B R_2 = 0$, où A et B sont des polynômes arbitraires en $X = \partial/\partial x$, $Y = \partial/\partial y$, $Z = \partial/\partial z$ et $T = \partial/\partial t$. La condition d'intégrabilité des équations des potentiels, dans un milieu homogène et isotrope dans lequel existent des densités de charge ρ et des densités de courant J , est donnée par $\text{div } J + \partial \rho / \partial t = 0$, c'est-à-dire la condition de conservation de la charge électrique autour d'un point. On démontre aussi l'intégrabilité des équations attachées au photon par L. de Broglie. *M. Nedelcu.*

Gavrila, M.: Une démonstration des formules de Liénard-Wiechert. *Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. Bucuresti. Ser. Şti. Natur.* 1, Nr. 2, 57—61, russ. u. französ. Zusammenfassg. 61 (1953) [Rumänisch].

A new method is given for establishing the formulae of Liénard-Wiechert of the classical electromagnetic potentials, from their expression by means of the retarded integrals. In contrast to the methods usually used, the one proposed is mathematically rigorous, though somewhat longer. An identity is established first for the charge density $\rho(x, y, z, t = rc)$ which appears in the considered integrals; a convenient change of variables is performed afterwards. In the end the potentials are given a form rigorously equivalent to that of the retarded integrals; from this one finds immediately the desired formulae of Liénard-Wiechert, by assuming the charge to be localised. *M. Nedelcu.*

Sokolov, A. A., N. P. Klepikov und I. M. Ternov: Zur Frage der Ausstrahlung schneller Elektronen im Magnetfelde. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 89, 665—668 (1953) [Russisch].

The authors start from the Dirac equation for an electron in a uniform magnetic field, with the vector-potential in the form $A_y = Hx$, $A_x = A_z = 0$, and consider the total radiation during a transition between states with the quantum numbers l, l' assuming that $|(l - l')/l| \ll 1$. Neglecting terms of the order of $(l' - l)^2/l^2$, they obtain a lengthy integral involving Laguerre polynomials, and after numerous further approximations they arrive at the result

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{c} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^4 \left\{ 1 - \frac{55\sqrt{3}}{16} \left(\frac{\hbar}{mcR} \right) \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 + \dots \right\}$$

where R is the radius of the orbit and $\omega_0 = e c H / E$. Replacing \hbar by 0 gives agreement with a classical formula. *F. V. Atkinson.*

Ferguson, A. E.: The parameters of a four-terminal network. *Austral. J. appl. Sci.* 4, 18—27 (1953).

In this paper it is discussed the analysis of four terminal electrical networks. It is shown that matrix methods may be conveniently used in a great deal of the algebraic work. The relationship of the general circuit constant to the more commonly specified image parameters and propagation constant of a network is discussed. There are given typical applications to the: transmission lines, Thévenin's theorem, etc. The methods may be applicable to other linear physical systems. *M. Nedelcu.*

Cahen, Gilbert: Perturbation des oscillateurs filtrés. II. *C. r. Acad. Sci., Paris* 236, 356—358 (1953).

Colombo, Serge: Sur une définition générale de la bande passante. *C. r. Acad. Sci., Paris* 237, 427—429 (1953).

• **Marton, L.** (edited by): *Advances in electronics*. Vol. V. New York: Academic Press Inc., Publishers 1953. XI, 420 p.

Der vorliegende Band V von *Advances in Electronics* enthält die folgenden Beiträge: 1. Detektoren im sichtbaren Spektralbereich und im Ultrarot (R. C. Jones, Cambridge, Massa-

chusetts). 2. Beta-Strahlen-Spektrometer (R. W. Hayward, Washington); 3. Kristallphosphoreszenz (F. E. Williams, New York); 4. Thoriumoxyd-Kathoden (W. E. Danforth, Swarthmore) Pennsylvania; 5. Moderne Vakuumpumpen (H. C. Weingartner und S. W. Kennedy, Cambridge, Massachusetts); 6. Stationäre Theorie des Magnetrons (R. Q. Twiss, Baldock, Herts, England); 7. Farbfernsehen (C. J. Hirsch, Little Neck, New York); 8. Transistoren (J. S. Schaffner, Syracuse, New York). — Wie aus den angeführten Titeln ersichtlich, handelt es sich um eine sehr heterogene Zusammenstellung von elektronischen Arbeitsgebieten, wobei Artikel mit physikalischem, technischem und technologischem Charakter sich abwechseln. Die einzelnen Abhandlungen bringen übersichtliche Darstellungen der behandelten Gebiete und sind mit ausführlichen Literaturhinweisen versehen. Einigen Autoren war es auch darum zu tun, den Charakter der zusammenfassenden Berichte durch eine geschlossene, lehrbuchartige Darstellung zu erweitern. So z. B. die Abschnitte 1, 6 und 8, auf welche wir noch näher eingehen werden. — Von den mehr technisch gehaltenen Zusammenfassungen ist vor allem der Artikel über Farbfernsehen für den europäischen Leser von Interesse. In diesem werden mit großer Ausführlichkeit die verschiedenen Prinzipien der in den USA entwickelten Farbfernsehsysteme behandelt. Der Abschnitt über Thoriumoxyd-Kathoden hat einen vorwiegend technologischen Charakter und wird die Röhrenfachleute interessieren. — Der Abschnitt über Detektoren enthält eine allgemeine Theorie der verschiedenen im Frequenzbereiche von 10^{12} bis 10^{14} Hz verwendeten Anzeigergeräte mit der Zielsetzung, die physikalisch und konstruktiv sehr verschieden ausgeführten Anzeigergeräte nach einem übergeordneten Gesichtspunkt in Klassen zusammenzufassen. Unter anderem werden Bolometer, die verschiedenen Arten von photoelektrischen und -chemischen Detektoren, die Radioantenne usw. behandelt. Zunächst geht der Verf. auf die die Detektorwirkung begrenzenden Rauscheffekte ein. Zur exakten Beschreibung der Güte eines Detektors werden scharfe Definitionen eingeführt, als deren wichtigste die „Detektivität“ (dedectivity) zu nennen ist, welche als Verhältnis der Ausgangs- zur Eingangsleistung bezogen auf die mittlere Rauschleistung des Ausgangs definiert ist. Um mittels der Detektivität die Leistungen der einzelnen Detektoren miteinander vergleichen zu können, unterscheidet Jones Detektoren der Klasse I und II, deren Detektivität im Bezug auf eine charakteristische Zeitkonstante verschiedenes Verhalten aufweisen. — Der Artikel von R. Q. Twiss bringt einen interessanten Beitrag zur Theorie der Elektronenbewegung im stationären, elektrischen und magnetischen Felde (preoscillating state). Es wird angenommen, daß die Austrittsgeschwindigkeiten der Elektronen an der Kathode eine Maxwell'sche Verteilung zur Temperatur T bilden. Entsprechend dem Vorgehen von Brillouin, der den Fall $T = 0$ behandelt hat, werden 3 Zustände unterschieden, je nachdem die Elektronenbahnen Umkehrpunkte besitzen oder nicht. Dementsprechend gibt es einen „single, double- und multi-stream“ Lösungstyp. Unter anderem zeigt der Verf., daß die Elektronenströmung, welche mit verschwindender Tangentialgeschwindigkeit die Kathode verlassen, zum double-stream Typ gehören, während die Elektronenströmungen, deren Austrittsgeschwindigkeiten auch Tangentialkomponenten besitzen, im allgemeinen dem multi-stream Typ angehören. Bis auf den letzten Abschnitt beziehen sich die Rechnungen auf ebene Anordnungen. — Der letzte Abschnitt des Buches ist den Transistoren gewidmet. Die moderne Halbleiterphysik hat mit dem Transistor ein Elektronengerät hervorgebracht, welches heute an Stelle der Elektronenröhre mit Steuergitter eine vielseitige technische Verwendung findet. Der Verf. hat vor allem die Schaltungstechnik der Transistoren behandelt und führt damit den Leser in ein heute noch wenig bekanntes Gebiet ein. Vor allem finden die Transistor-Verstärkerschaltungen und ihre Ersatzschaltbilder eine eingehende Darstellung, wobei auf Grund der Vierpoltheorie die drei Haupttypen von Transistorschaltungen: Geerdeter Kollektor, geerdeter Emittor und geerdete Basis ausführlich behandelt werden. — Physikalisch von Interesse ist ferner der Abschnitt über Kristallphosphoreszenz. Der Verf. (F. E. Williams) geht nach einem kurzen Überblick über die allgemeinen Eigenschaften der Kristalllumineszenz auf einige von ihm untersuchte Phosphore näher ein, wie z. B. auf das durch Thallium aktivierte Kaliumchlorid, dann auf eine Gruppe durch Mangan aktivierte Phosphore und schließlich auf die Sulfidphosphore. Das vom Verf. stammende Energiebandmodell $KCl : Tl$, welches durch wellenmechanische Rechnungen gestützt ist, wird eingehend diskutiert. Schließlich behandelt der Verf. die erst 1947 von Destriau entdeckte Elektrolumineszenz und bringt neben experimentellen Resultaten auch theoretische Ergebnisse und ein diesbezügliches Energiebandmodell.

E. Lüdinegg.

Nicolau, Edmond: Relations de réciprocité et de conservation en électricité. Acad. Republ. popul. Române, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. 4, 739–748, russ. und französ. Zusammenfassg. 748–749 (1952) [Rumänisch].

On établit des relations de réciprocité pour deux cas: a) les phénomènes électromagnétiques dans les diélectriques parfaits; b) les phénomènes électriques sur les lignes de transmissions. Si l'on particularise, faisant en sorte que dans un certain cas les deux solutions coïncident, on obtient les théorèmes de conservation de l'énergie et de l'impulsion.

P. Constantinescu.

Nicolau, Edmond: Au sujet des séries de radiateurs ayant une caractéristique de radiation donnée. Acad. Republ. popul. Române, Bul. ști. Sect. Ști. mat. fiz. 5, 181—190, russ. und französ. Zusammenfassg. 190 (1953) [Rumänisch].

Lošakov, L. N.: Wellenfortpflanzung im Wellenleiter bei Vorhandensein eines Elektronenbüschels unter Berücksichtigung der Dämpfung. Žurn. techn. Fiz. 23, 1820—1837 (1953) [Russisch].

An Hand einer früher beschriebenen, die Rechnungen vereinfachenden Modellvorstellung [žurn. Mech. Fiz. 22, 193—202 (1952)] wird der Prozeß der Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen vom Typ E , deren longitudinales elektrisches Feld auf die Elektronenbewegung eines im Wellenleiter vorhandenen Elektronenbüschels einen Einfluß ausüben kann, weiter untersucht und dabei auch die Dämpfung in Metallwand und Dielektrikum berücksichtigt. Das Modell ist ein regulärer Wellenleiter, dessen Inneres vollkommen mit einem Dielektrikum angefüllt ist, das die Phasengeschwindigkeit der Wellen \ll als die Lichtgeschwindigkeit macht: im Dielektrikum können sich die Elektronen frei verschieben, sie bewegen sich in axialer (z -) Richtung und bilden ein den gesamten Innenraum des Leiters erfüllendes Büschel. Die Resultate sollen qualitativ für beliebige Verzögerungsleitungen gelten. Für die Fortpflanzungskonstante γ wird eine algebraische Gleichung 4. Grades abgeleitet. Demgemäß existieren im allgemeinen 4 Wellen, was auf eine Analogie des Modells mit zwei gekoppelten Übertragungsleitungen hinweist. In einer Arbeit von S. Ramo (dies. Zbl. 22, 36) werden zwei dieser Wellen Feldwellen, die beiden anderen Raumwellen genannt. — Die Abhängigkeit der verschiedenen γ vom Büschelstrom M_0 und vom Verhältnis $\eta = v_0/a_0$ (a_0 konstante Komponente der Elektronengeschwindigkeit, ist gleich der Anfangsgeschwindigkeit bei $z = 0$; v_0 Phasengeschwindigkeit der Welle bei Fehlen des Elektronenbüschels) wird ausführlich diskutiert (2 Tabellen, 6 Diagramme).

H.-J. Hoehnke.

Lopuchin, V. M. und V. S. Nikol'skij: Die Elektronik eines mit Blenden belasteten Wellenleiters. Žurn. techn. Fiz. 23, 2205—2213 (1953) [Russisch].

Die Wechselwirkung zwischen einem Elektronenstrahl und elektromagnetischen Wellen mit reduzierter Phasengeschwindigkeit ist bereits vielfach untersucht worden. Verff. ermitteln in dieser Arbeit für einen kreiszylindrischen Wellenleiter, der mit unendlich-dünnen Irisblenden von konstantem Öffnungsradius a belastet ist und von einem Elektronenstrahl in axialer Richtung durchdrungen wird, die Beeinflussung seiner Übertragungseigenschaften durch die Wärmebewegung im Konvektionsstrom der Elektronen. Dabei wird vorausgesetzt, daß $l \ll \lambda$, $l \ll a$, wo l der konstante Abstand benachbarter Blenden und λ die Wellenlänge im Leiter ist. Man ist nur an E -Wellen-Lösungen interessiert. Die Wechselwirkung zwischen Welle und Strahl wird nach der Störungsmethode der Felder eines kalten Systems (die Dichte j des Konvektionsstroms ist $= 0$) bestimmt. An Hand von Diagrammen diskutieren Verff. die Abhängigkeit des Verhältnisses $\chi = \beta/\beta_0$ von $\xi = v_e/v_0$ für einzelne Werte des Elektronenstroms und von $\mu = (1/\epsilon/2 v_e)^2$. Dabei ist $i\beta$ die komplexe Fortpflanzungskonstante der Welle, $i\beta_0$ ihr Wert für $j = 0$, ferner v_0 die Phasengeschwindigkeit der Welle für $j = 0$, v_e die konstante Komponente der Elektronengeschwindigkeit und $1/\epsilon$ ihre Streuung um die mittlere Geschwindigkeit v_e . Es zeigt sich, daß der betrachtete Wellenleiter für gewisse ξ die Fähigkeit besitzt, cm-Radiowellen zu verstärken und daß die größte Verstärkung für $\xi = 1$ erreicht wird. Die Wärmebewegung der Elektronen im Strahl führt zu einer Verkleinerung des Maximalwertes des Verstärkungskoeffizienten (Imaginärteil $\text{Im } \chi$) und zur Verengung des Wertebereichs der ξ , für welche Verstärkung ($\text{Im } \beta > 0$) stattfindet, sowie zur Verschiebung dieses Bereichs in Richtung größerer ξ . Ergänzend zu der von Verff. angegebenen Literatur darf Ref. auf die Untersuchungen von C. C. Cutler [Bell Telephone Laboratories Report No. MM 44—160—218 (1944)] und V. J. Van-huyse (s. dies. Zbl. 61, 444) hinweisen.

H.-J. Hoehnke.

Kompaneec, A. S. und Ju. S. Sajasov: Der Einfluß der Gaufrage von Oberflächen auf die Eigenschwingungen und die Verluste in elektromagnetischen Resonatoren. *Žurn. techn. Fiz.* **23**, 2185—2199 (1953) [Russisch].

Zur Erklärung der Feststellung, daß die berechneten Verluste in elektromagnetischen Resonatoren und Wellenleitern etwas kleiner als die experimentell bestimmten sind, werden gewöhnlich zwei Gründe angegeben: 1. Die Leitfähigkeit der metallischen Wandungen wird durch Fremdkörper an der Oberfläche herabgesetzt. 2. Die Oberfläche ist infolge unvermeidlicher Unvollkommenheit der Bearbeitung nicht ideal-glatt. F. A. Benson [*Proc. Inst. electr. Engin.* **100**, 85—90 (1953)] hat den Einfluß kleiner Unebenheiten der Leiter-Oberfläche auf die Verluste in zylindrischen Resonatoren experimentell bestimmt und gleichzeitig Rillen von 10^{-3} cm Tiefe im Mikrorelief der Oberfläche gefunden, die hauptsächlich auf Kreislinien senkrecht zur Mantellinie liegen. Die gemessene Vergrößerung der Verluste im Vergleich zu der berechneten betrug für den Fall einer Grundwelle vom magnetischen Typ etwa 7,4%, die Vergrößerung der Oberfläche 12%. Verf. ergänzen dieses Ergebnis durch theoretische Untersuchung des Einflusses periodischer Unebenheiten der metallischen Wandungen zylindrischer Wellenleiter auf die Verluste bei Grundwellen vom Typ E und H . Es wird angenommen, daß die zylindrische Gestalt der Fläche durch parallele Rillen gestört ist, die entweder parallel oder senkrecht zu den Mantellinien verlaufen. Das Verhältnis der Rillentiefe („Gaufrage“) zur Breite kann groß sein, dagegen wird die Rillenbreite a) als klein im Vergleich zur Wellenlänge und b) als groß gegenüber der Eindringtiefe des Feldes in den Leiter vorausgesetzt. Neben der Methode der partikulären Lösungen wird die Methode der konformen Abbildung verwendet, da wegen a) die Feldverteilung aus der Laplaceschen Gleichung ermittelt werden kann, was in zwei Beispielen ausgeführt wird (gezahntes Profil und Mäanderlinie). H.-J. Hoehnke.

Beyer, Hermann: Untersuchungen über den Einfluß der Gestalt der Aperturblende auf die mikroskopische Abbildung beim Phasenkontrastverfahren. *Jenaer Jahrbuch* **1953**, 162—209 (1953).

Berechnung der Helligkeitsverteilungen im Phasenkontrast-Bild eines kreisförmigen Phasenobjektes (Radius B) bei voll ausgeleuchtetem kreisringförmigem Phasenplättchen (Ringbreite $1R$), und mikrophotographische Aufnahmen bei verschiedenen Objektradien B und Phasenringbreiten $1R$. Je nachdem, ob $kB \cdot 1R \ll 1$ klein oder groß ist, wird das Phasenobjekt objekttrreu oder mit Halo abgebildet ($k = 2\pi/\lambda$). H. Marx.

Boolsky, R.: *Optique géométrique axiomatique*. *Helvet. phys. Acta* **26**, 743—754 (1953).

An Stelle der Gaußschen idealen Abbildung des Objektraums in den Bildraum, die in Strenge nicht realisierbar ist, betrachtet der Verf. als Idealfall das realisierbare „modèle iconal“. Bei diesem wird nicht der ganze Objektraum scharf abgebildet, sondern nur eine kugelförmige (im Grenzfall plane) Objektfäche in eine kugelförmige (plane) Bildfläche und ein (außerhalb dieser Objektfäche liegender) objektseitiger Achsenpunkt in einen bildseitigen Achsenpunkt mit einer bestimmten Zuordnung der bildseitigen zu den objektseitigen Strahlneigungen. Hierdurch ist die Abbildung der ganzen räumlichen Strahlenmannigfaltigkeit vollständig bestimmt. Jede beliebige Abbildung (durch rotationssymmetrische Kugelflächensysteme) läßt sich auffassen als eine Abbildung durch mehrere hintereinandergesetzte „modèles iconaux“, denn eine brechende Kugelfläche stellt ein einfaches Beispiel eines „modèle iconal“ dar. — Die Zusammenhänge zwischen den Abbildungsfehlern, von denen der Verf. auf S. 753 der Arbeit spricht, lassen sich nach Ansicht des Ref. besser mit Hilfe des Eikonal-Begriffs und der bekannten Potenzreihendarstellung des Eikonals für rotationssymmetrische Systeme überblicken; man sieht dann auch, daß die auf S. 753 diskutierte Größe G in sehr einfacher Weise von X_1 abhängt. $G(X_1)$ ist auch

keine komplizierte Funktion der Langeschen Konstruktionsdaten. Der Verf. sieht G als eine äußerst komplizierte Funktion von X_1 und der Konstruktionsdaten an.

H. Marx.

Sonnefeld, A.: Über einfache projektive Beziehungen auf der Achse und auf den Hauptstrahlen an der idealen spiegelnden Kugelfläche. Jenaer Jahrbuch 1953, 215 – 221 (1953).

Geometrische (zeichnerische) Konstruktion des Bildstrahls mit seinem sagittalen und seinem tangentiellen Schnittpunkt (Brennpunkt) bei der Abbildung (eines von einem unendlich entfernten Objektpunkt kommenden meridionalen Objektstrahls) durch eine spiegelnde Kugelfläche.

H. Marx.

Focke, Joachim: Die analytische Theorie des Öffnungs- und Asymmetriefehlers und ihre Anwendung zur Vorrechnung optischer Systeme. Jenaer Jahrbuch 1953, 97—161 (1953).

Für den Öffnungsfehler 5. Ordnung und für den Asymmetriefehler 5. Ordnung bringt der Verf. Formeln, die ähnlich einfach sind wie die bekannten Seidelschen Formeln für die Bildfehler 3. Ordnung; in den Ausdrücken für den Flächenanteil des Öffnungsfehlers 5. Ordnung und für den Flächenanteil des Asymmetriefehlers 3. Ordnung kommen vor: der Flächenanteil und die Teilsumme des Öffnungsfehlers 3. Ordnung, der Flächenanteil und die Teilsumme des Asymmetriefehlers 3. Ordnung, und die gleichen paraxialen Größen und Konstruktionsdaten wie in den Ausdrücken für die Flächenanteile der Seidelschen Bildfehler. Bei deren routinemäßiger Berechnung (nach M. Berek, Grundlagen der praktischen Optik, Berlin 1930) können mit Hilfe der Fockeschen Formeln auch der Öffnungsfehler und der Asymmetriefehler 5. Ordnung ohne wesentlich größeren Rechenaufwand mitgerechnet werden. Verf. bringt als Beispiele die in dem Bereksehen Buch für einige Objektive stehenden Tabellen der Seidelschen Flächenanteile und Summen, die er erweitert um die Flächenanteile und Summen des Öffnungsfehlers und des Asymmetriefehlers 5. Ordnung. Ferner bringt der Verf. neue, einfache Vorrechnungs-Formeln für die Seidelschen Bildfehler, indem er den Öffnungsfehler und den Asymmetriefehler 3. Ordnung einer dünnen Linse ausdrückt durch deren Langesche Konstruktionsdaten. Diese Vorrechnungsformeln erweitert der Verf. dann um solche für den Öffnungsfehler und den Asymmetriefehler 5. Ordnung. Schließlich formt der Verf. (im Hinblick auf eine Erweiterung der Vorrechnung für dicke Linsen) seine obengenannten Ausdrücke für den Flächenanteil des Öffnungsfehlers 5. Ordnung und für den Flächenanteil des Symmetriefehlers 5. Ordnung um, indem er die darin (neben dem Flächenanteil und der Teilsumme des Öffnungsfehlers und des Asymmetriefehlers 3. Ordnung) stehenden paraxialen Größen und Konstruktionsdaten ausdrückt durch die Langeschen Konstruktionsdaten (die voneinander unabhängig sind und durch die allein man nach Lange die Flächenanteile der Bildfehler 3. Ordnung ausdrücken kann; man braucht dann keine paraxiale Zwischenrechnung). Nach Ansicht des Ref. liefert der Verf. mit dieser Arbeit wertvolle Formeln, welche die Konstruktionsdaten eines optischen Systems nach einem festen Rechenschema auszurechnen gestatten aus vorgegebenen Werten oder Maximalwerten der Zonenfehler des Systems. Diese Aufgabe der Bildfehler-Theorie ist für die Praxis wichtig, in ihrer Allgemeinheit aber bisher noch ungelöst. Bis jetzt ist man in der Praxis der rechnenden Optik noch zu sehr angewiesen auf Rechen-Erfahrungen und auf „trial and error“, ein mehr oder weniger systematisches Herumprobieren. Obwohl sich das Ausprobieren von Änderungen an einem System neuerdings mit elektronischen Rechenmaschinen systematischer und vollständiger abwickeln läßt, besteht in der rechnenden Optik das Verlangen nach einer Lösung der genannten Aufgabe der Bildfehler-Theorie nach wie vor, auch bei Benutzern elektronischer Rechenmaschinen.

H. Marx.

Straškevič, A. M.: Graphoanalytische Methoden zur Ermittlung der Trajektorien relativistischer geladener Teilchen in elektrostatischen Feldern. *Žurn. techn. Fiz.* **23**, 1796—1801 (1953) [Russisch].

Grinberg, G. A.: Über einige Klassen der statischen achsensymmetrischen elektrischen und magnetischen Felder, für die die Grundgleichung der Elektronenoptik eine Lösung in bekannten Funktionen zuläßt. *Žurn. techn. Fiz.* **23**, 1904—1914 (1953) [Russisch].

Die Differentialgleichung der paraxialen Elektronenbahnen r , die immer in der Form $r'' + f(z)r = 0$ geschrieben werden kann, hat Lösungen $r(z)$, die sich durch Zylinderfunktionen ausdrücken lassen, wenn die die elektrische oder magnetische Feldverteilung enthaltende Funktion $f(z)$ ebenfalls in geeigneter Weise durch Zylinderfunktionen ausgedrückt werden kann (vgl. Kamke, Differentialgleichungen I, Nr. 2, 32, s. dies. Zbl. **41**, 54). In der derart gefundenen Klasse von Feldverteilungen mit streng lösbarer Bahngleichung sind als Sonderfälle auch einige einfache Verteilungen enthalten, so die elektrostatische Immersionslinse $\Phi(z) = A + B \operatorname{arctg}(z/a)$, die Verteilung $\Phi = \Phi_0 \exp[-(z/a)^n]$ und das Magnetfeld $H(z) = H_0 [1 + (z^2/a^2)]^{-1} [1 + \operatorname{arctg}(z/a)]^{-1}$. Die komplizierte mathematische Form der erhaltenen Lösungen $r(z)$ läßt allerdings möglich erscheinen, daß man zu praktischen Konsequenzen für die Elektronenoptik leichter durch numerische Integration der Bahngleichung gelangt.

F. Lenz.

Cukerman, I. I.: Über die magnetische Fokussierung in Senderöhren mit Bildübertragung. *Žurn. techn. Fiz.* **23**, 1228—1238 (1953) [Russisch].

Theoretische Untersuchung der elektronenoptischen Abbildung in Bildwandlerstufen von Fernseh-Aufnahmekameras. Daß die übliche („optische“) Theorie der elektronenoptischen Abbildung durch rotationssymmetrische Linsen nicht angewandt werden könne, begründet der Verf. damit, daß das Magnetfeld am Ort der Photokathode nicht verschwindet. Darin liegt eine Unterschätzung der Möglichkeiten der üblichen Bildfehlertheorie, die keineswegs auf den Fall verschwindender Felder in der Ding- und Bildebene beschränkt ist. Zur Bestimmung der Stärke der abbildenden Magnetlinse, für welche die Photokathode und die Treffplatte konjugierte Ebenen werden, wird die Eigenwertmethode (W. Glaser 1950) angewandt.

F. Lenz.

Achiezer, A. und A. Sitenko: Zur Theorie der Anregung des Endovibrators durch ein bewegtes geladenes Teilchen. *Žurn. techn. Fiz.* **23**, 1217—1223 (1953) [Russisch].

The authors consider from a physical point of view the formal solution of $\Delta A = -c^{-2} \partial^2 A / \partial t^2 = -4\pi j$, c. where the vector-potential A is to satisfy $\operatorname{div} A = 0$ and boundary conditions, by means of an eigen-function expansion $\sum q_\lambda(t) A_\lambda(r)$. Energies and intensities are calculated. Details are given for the case of a particle executing a circular orbit in a symmetrical manner inside a finite cylinder with conducting walls, infinite cylinders being obtained as limiting cases.

F. V. Atkinson.

Relativitätstheorie:

● **Muses, C. A.:** An evaluation of relativity theory after a half-century. New York: S. Weiser, Inc. 1953. VIII, 48 p.

Rumer, Ju. B.: Eine optisch-mechanische Analogie. *Uspechi mat. Nauk* **8**, Nr. 6, 55—69 (1953) [Russisch].

In der Arbeit: Wirkung als Raumkoordinate [*Žurn. eksper. teor. Fiz.* **19**, 86—94; 207—214; 868—875 (1949); **21**, 454—461; 1403—1411 (1951); dies. Zbl. **49**, 139; 274] hat der Verf. eine fünfdimensionale Feldtheorie durch Einführung einer fünfdimensionalen Welt von Raum, Zeit und Wirkung begründet. Hier weist er zuerst auf die geschichtliche Entwicklung der Ideen über die optisch-mechanischen Analogien und

zeigt, daß diese Analogien noch viel weitergehend sind. Gerade in dieser Welt offenbart sich eine weitgehende Symmetrie der Gleichungen der klassischen relativistischen Mechanik und eine tiefe Analogie sowohl zwischen den Prinzipien der Optik einerseits und der Mechanik andererseits als auch zwischen der Ausbreitung der Lichtstrahlen und der Dynamik der geladenen Teilchen. Diese Darstellung wurde vollkommen in die spätere Veröffentlichung des Verf.: Untersuchungen zur 5-Optik (dies. Zbl. 72, 215) als I. Kapitel aufgenommen. *T. P. Angelitch.*

Onicescu, O.: Une mécanique nouvelle des systèmes matériels. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. Bucureşti, Ser. Şti. Natur. 2, Nr. 3, 23—32, russ. u. französ. Zusammenfassg. 32—33 (1953) [Rumänisch].

L'A. présente, sous forme analytique, une mécanique des systèmes holonomes à un nombre fini de libertés, dont les équations du mouvement se confondent pour les grandes vitesses du point matériel avec celle d'Einstein, en relativité restreinte. Le cas du mouvement d'inertie de deux points matériels, sous-traités à toute action extérieure, où gravitation et inertie sont identifiées, est aussi traité en quelque détail. Il y apparaît dans les formules une masse d'interaction, fonction de la distance et négligeable dans la mécanique céleste, selon l'A., qui impose à ses résultats théoriques les conditions à posteriori indiquées par l'expérience. L'A. construit sa mécanique en s'appuyant sur l'étude théorique des systèmes analytiques, définis à l'aide des paramètres canoniques q_i, p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) et d'une fonction $f(q, p, t)$ caractérisant l'état du système considéré. On y ajoute 4 axiomes du mouvement d'inertie du point matériel, qui conduisent à des résultats conformes à la théorie de la relativité restreinte et donc, en particulier, à la mécanique newtonienne. L'A. indique enfin la possibilité de vérifications numériques de ses formules (mouvement du périhélie de Mercure, déviation du rayon lumineux au voisinage de la masse du Soleil et déplacement des raies spectrales vers le rouge), dont les résultats seraient concordants avec l'expérience. *A. Froda.*

Gheorghita, Şt.: Sur un oscillateur avec la masse variable. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. Bucureşti, Ser. Şti. Natur. 1, Nr. 2, 19—21, russ. u. französ. Zusammenfassg. 21 (1953) [Rumänisch].

Verf. studiert die geradlinige Bewegung eines Oszillators unter der Annahme, daß die Masse eine longitudinale im Sinne der speziellen Relativitätstheorie ist. Im Falle kleiner Geschwindigkeiten ($x \ll c$, c = Lichtgeschwindigkeit) wird der Ausdruck $(1 - v^2/c^2)^{3/2}$ durch $1 - \frac{1}{2} v^2/c^2$ ersetzt und die zugehörige Differentialgleichung nach der Methode von Krylov-Bogoljubov (Introduction to nonlinear mechanics, Princeton 1943) integriert. Es ergibt sich, daß die betreffende Frequenz kleiner als im Falle der konstanten Masse ausfällt. *V. Vălcovici.*

Matrai, T.: A relativistic treatment of rigid motion. Nature 172, 858—859 (1953).

Auf Grund der kovarianten Definition „starrer Bewegung“ zweier Punkte: $(dx^\mu(t_1)/d\tau_1)[x_\mu(t_1) - y_\mu(t_2)] = 0$; $[x^\mu(t_1) - y^\mu(t_2)][x_\mu(t_1) - y_\mu(t_2)] = s_{12}^2 = \text{const.}$ [die erste Gleichung bestimmt $t_1 = t_1(t_2)$ oder die Umkehrung] werden an und für sich bekannte Sätze über die Bewegung von Punktsystemen zusammengestellt. Dabei ist allerdings Satz (3) nicht aus den Voraussetzungen ableitbar. *F. Beck.*

Popovici, Andrei: Le principe de la réciprocité en théorie relativiste conforme. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. Bucureşti, Ser. Şti. Natur. 2, Nr. 3, 78—130, russ. u. französ. Zusammenfassg. 130—131 (1953) [Rumänisch].

En partant de la relativité générale (métrique de H. Reissner) et de la covariance conforme des équations maxwelliennes, l'auteur en déduit les relations conformes générales $ds^2 = ds^2 F = ds^2 F^2$ entre les métriques des variétés V_4, V_4, V_4 (impulsion-énergie, charge-flux magnétique, coordonnées-durée; F = champ maxwellien). Elles constituent une extension des relations liant énergie W , charge e_0 et rayon a de la particule élémentaire et mènent aux relations nonlinéaires des champs

de Born-Infeld. Les équations gravifiques établies $\Gamma G'_{ik} + k S_{ik} = 0$ ($G'_{ik} = \Gamma_{ik} - \frac{1}{4} \Gamma g_{ik}$, S_{ik} = tenseur maxwellien) sont riemanniennes par rapport à la métrique $u_{ik} = \psi g_{ik}$ (de poids nul en g_{ik}) et covariantes par rapport aux transformations conformes de g_{ik} . Elles vérifient la loi de la réciprocité généralisée (covariance des lois physiques pour la permutation des variables $\bar{V}_4, \bar{V}_4, \bar{V}_4$). Pour $\psi = \Gamma$, $S_{ik} = 0$ on obtient les équations conformes de E. Reichenbächer [Z. Phys. 45, 663—688 (1927)]. La loi de la réciprocité est fondée alors sur la géométrie conforme — résultat retrouvé en relativité restreinte par R. Ingraham [Il Nuovo Cimento, 12, 825—851 (1954)]. Le groupe conforme admettant les inversions, l'A. en déduit aussi une réciprocité des lois physiques valables pour la région extérieure (champ) ($r > a$) et région intérieure ($r < a$) de la particule, pour une permutation du rayon vecteur r et de l'énergie locale maxwellienne r' . G. Vrănceanu.

Papapetrou, A.: Das Problem der Bewegung in der allgemeinen Relativitätstheorie. Fortschr. Phys. 1, 29—43 (1953).

Die Arbeit gibt einen Überblick über die Entwicklung des Bewegungsproblems in der allgemeinen Relativitätstheorie. — 1928 haben Einstein und Grommer gezeigt, daß durch die Einsteinschen Feldgleichungen die Bewegung der Quellen des Gravitationsfeldes bereits vollständig bestimmt ist und kein Platz über die zusätzliche Einführung von Bewegungsgleichungen ist. Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen gibt es prinzipiell zwei Methoden: Bei der ersten, die 1938 von Einstein, Infeld und Hoffmann entwickelt wurde, werden die Feldquellen durch Singularitäten der $g_{\mu\nu}$ ausgedrückt. Bei der zweiten Methode, die Fock 1939 begründete, werden die Feldquellen durch einen phänomenologischen Materietensor $T_{\mu\nu}$ beschrieben. Im Rahmen der Einstein-Infeld-Hoffmann-Methode folgen die Bewegungsgleichungen unmittelbar aus den Integrabilitätsbedingungen der Feldgleichungen. Bei der zweiten Behandlungsart ergeben sich die Bewegungsgleichungen am einfachsten aus der zweimal kontrahierten Bianchi-Identität, d. h. aus der dynamischen Gleichung $T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = 0$. Mit Hilfe beider Methoden sind die relativistischen Bewegungsgleichungen sowohl für das astronomische n -Körperproblem (schwaches Gravitationsfeld und kleine Relativgeschwindigkeit der Feldquellen) als auch für Probeteilchen in beliebigem vorgegebenen Gravitationsfeld hergeleitet worden. H. Treder.

Kustaanheimo, Paul: A note on the transformability of spherically symmetric metrics. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 9, 13—16 (1953).

Dans un papier en collaboration avec Quist (ce Zbl. 30, 282), l'A. avait énoncée que toute métrique à symétrie sphérique $ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 (ds^2 + \sin^2 \theta dq^2)$ où ν et λ sont fonctions de r et t , peut être ramenée à la forme isotropique $ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\mu} (\delta_{ik} dx^i dx^k)$ où r et μ dépendent des nouvelles variables r et t . Dans le cas statique le résultat est bien connu. Son extension au cas général a été mise en question par Wyman. L'A. donne ici une démonstration simple et élégante de ce résultat, qu'il illustre par un exemple. A. Lichnerowicz.

McVittie, G. C.: A method of solution of the equations of classical gas-dynamics using Einstein's equations. Quart. appl. Math. 11, 327—336 (1953).

Durch Einführung einer beinahe pseudoeuklidischen Metrik, in der vier zunächst noch willkürliche Funktionen $\varphi_k(x_1, x_2, x_3, x_4)$ enthalten sind, gelingt es, die Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie unter Heranziehung geeigneter Nebenbedingungen auf die Bewegungsgleichungen eines idealen reibungsfreien Gases, verbunden mit beliebigen Zustandsänderungen, zurückzuführen. Die bekannte Tatsache, daß die Einsteinschen Gleichungen Ausdrücke für Dichte, Druck und Geschwindigkeit eines idealen Gases als Funktionen der g_{ik} , d. h. als Funktionen der Potentiale liefern, kann also direkt zur Lösung klassischer gasdynamischer Probleme mit konstanter oder variabler Entropie herangezogen werden. Allerdings müssen die Nebenbedingungen für die Potentiale beachtet werden. Wie dies geschieht und wie man zu effektiven Lösungen des gasdynamischen Problems gelangt, zeigt Verf. an einem eindimensionalen instationären Problem. F. Cap.

Salam, Abdus: Cosmological theory. Pakistan J. Sci. 5, 55–58 (1953).

Es werden die kosmologischen Arbeiten von Bondi (1952) und von Hoyle (1948) im Zusammenhang mit den älteren Arbeiten von Eddington, Einstein und de Sitter in kurzer Form interpretiert.
W. Strohmeier.

Ivanenko, D. und A. Brodskij: Die Wechselwirkung der Gravitationen mit dem Vakuum von Teilchen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 731–734 (1953) [Russisch].

Finzi, Bruno: Su le equazioni di campo della teoria relativistica unitaria di Einstein. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 581–588 (1953).

Verf. geht von dem Variationsprinzip aus, das Einstein in der 4. Auflage von „The Meaning of Relativity“ (dies. Zbl. 50, 212) zur Herleitung der einheitlichen Feldgleichungen eingeführt hat. Er macht jedoch bei der Variation nach $g^{\mu\nu}$ zunächst den Ansatz $\delta g^{\mu\nu} = \eta^{\sigma\tau} \psi_{\sigma,\tau}$, so daß an Stelle der $\delta g^{\mu\nu}$ die ψ_{σ} als unabhängige Variationen treten; dies entspricht einer Variation mit der Nebenbedingung $g^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$. Die so erhaltenen Feldgleichungen sind diejenigen des schwachen Systems Einsteins. — Verf. läßt dann die Nebenbedingung $g^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$ fallen und macht für $\delta g^{\mu\nu}$ den allgemeinen Ansatz

$$\delta g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu\sigma\tau} \psi_{\sigma,\tau} + \sqrt{-g} g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} (\varphi_{\sigma,\tau} - \varphi_{\tau,\sigma}),$$

wobei an Stelle von $\delta g^{\mu\nu}$ jetzt die ψ_{σ} und die φ_{σ} die unabhängigen Variationen sind. Dieses Verfahren entspricht der vom Verf. (dies. Zbl. 48, 203) angegebenen Behandlung des Variationsprinzips der Maxwell'schen Theorie. Das aus dem Variationsprinzip Einsteins resultierende Gleichungssystem lautet nun

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0, \quad R^*_{\mu\nu} = 0, \quad \text{Rot } R^*_{\mu\nu} = 0, \quad \text{Div } R^*_{\mu\nu} = 0,$$

wobei $R^*_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - I_{\mu\nu}$ ist. Auf Grund dieser Gleichungen interpretiert der Verf. $R^*_{\mu\nu}$ als den elektromagnetischen Feldtensor.
H. Treder.

Castoldi, Luigi: Sulla struttura formale della relatività e su una classe notevole di connessioni metriche di interesse relativistico. Atti. Accad. Ligure Sci. Lett. 9, 5–14 (1953).

Die Grundgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie einschließlich elektromagnetischem Feld werden statt aus dem üblichen Variationsprinzip allein aus der Gleichung für R^k durch fortgesetzte Verwendung einer Art Einfachheitspostulat gewonnen; dabei stellt sich dann allerdings auch eine nicht-eichinvariante Gleichung ein. Ähnliche Überlegungen werden auch auf eine Theorie mit affinem Zusammenhang angewandt.
G. Lüders.

García, Godofredo: Die relativistischen Gleichungen von de Broglie und Schrödinger. Die Stabilität der Bewegungen. Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima 16, Nr. 3–4, 36–55 (1953) [Spanisch].

Fortsetzung der voraufgehenden Arbeit und Anwendung auf die Brogliesche Wellengleichung.
W. Macke.

García, Godofredo: Über die zeitgenössische Physik und die Schrödingergleichung in der Relativitätstheorie. Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima 16, Nr. 3–4, 3–35 (1953) [Spanisch].

Im Zusammenhang mit Arbeiten von Birkhoff wird eine neue Relativitätstheorie angeboten und auf die Schrödingergleichung angewandt.
W. Macke.

Nariai, Hidekazu: Some remarks on Jordan's projective relativity. Sci. Reports Tôhoku Univ., I. Ser. 37, 423–430 (1953).

Die Heckmannsche Lösung (das Analogon der Schwarzschild'schen für veränderliche Gravitationszahl) sowie Jordans Modelle von Materie- und Lichtkosmos werden behandelt für alle Werte der beiden Parameter, die in Jordans erweiterter

Gravitations-Theorie unbestimmt bleiben. Als mathematische Lösung ihrer Feldgleichungen gibt es ein „quasistatisches“ Modell, jedoch nur für solche Werte der beiden Parameter, die zum Widerspruch mit der beobachteten Periheldrehung führen.

K. Just.

Kalitzin, Nikola St.: Elektromagnetismus und Gravitation. C. r. Acad. Bulgare Sci. 4, Nr. 2/3, 13—15, russ. Zusammenfassg. 16 (1953).

An die Nordströmsche vereinigte Theorie des elektromagnetischen und Gravitationsfeldes [Phys. Z. 15, 504—506 (1914)] anknüpfend setzt der Verf. für den Vektor der in dem fünf-dimensionalen Minkowskischen Raum $R_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4 = i c t, x_5\}$ definierten Stromdichte die neue Definition $j_\lambda = \varrho_0(dx_\lambda/dt)(dt'/d\tau) = \varrho_0 v_\lambda/c$ voraus, wo $\varrho_0 = \varrho_0(x_1, x_2, x_3, x_5)$ die Ruheladungsdichte des Teilchens ω mit der Ladung ϱ , bzw. ω mit der Ladung $-\varrho$ bedeutet und $d\tau = ds/c$ (mit $ds = -dx_\lambda dx_\lambda$) ist. Auf diese Weise bekommt er formal die gewohnten Feldgleichungen, die aber jetzt neue physikalische Bedeutung besitzen. Dann wird weiter vorausgesetzt, daß die Elementarteilchen geradlinige Stromfäden von konstantem Querschnitt sind, welche senkrecht zu dem drei-dimensionalen Raum $R_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$ stehen und in Richtung x_5 von $-\infty$ bis $+\infty$ verlaufen. In diesen Stromfäden fließen ω und $\bar{\omega}$ Teilchen. Ein elektrisch geladenes Teilchen stellt einen Stromfaden dar, in welchem ω oder $\bar{\omega}$ Teilchen nur in einer Richtung fließen; ein neutrales Teilchen besteht aus zwei Stromfäden; in einem fließen die ω Teilchen, in dem anderen $\bar{\omega}$ Teilchen und zwar in der entgegengesetzten Richtung. Die beiden letzten Voraussetzungen werden überflüssig, wenn der Verf. auch Körper mit negativer Masse [?] einführt. Wenn $\varrho_0 = \text{konst.}$ ist, läßt sich beweisen, daß $m = \varrho q \int \pi^2 f \cdot v_5$ gilt (wo q das Volumen des Stromfadenquerschnittes in R_3 und f die auf die Längeneinheit des Stromfadens wirkende Kraft bedeuten). So bekommt der Verf. durch Veränderung von v_5 sämtliche Massen der verschiedenen Elementarteilchen. J. I. Horváth.

Kalitzin, Nikola St.: Eine Verallgemeinerung der Gleichungen der Elektrodynamik. C. r. Acad. Bulgare Sci. 4, Nr. 2/3, 17—20, russ. Zusammenfassg. 20 (1953).

Der Verf. entwickelt eine verallgemeinerte Theorie des elektromagnetischen Feldes in dem sechs-dimensionalen Raum $R_6 = \{x_1, x_2, x_3, x_4 = i c t, x_5, x_6\}$, die er als elektromagnetisches Gravitationsbifeld des Elektrons bezeichnet. Von dem schiefsymmetrischen Tensor $q_{\lambda\beta}$ bildet er den schiefsymmetrischen Tensor dritten Ranges $a_{\lambda\beta\gamma} = q_{\lambda\beta,\gamma} + q_{\beta\gamma,\lambda} + q_{\gamma\lambda,\beta}$, der den Feldgleichungen $a_{\lambda\beta\gamma,\lambda} = b_{\beta\gamma}$ genügt, wo $b_{\beta\gamma}$ den geeignet definierten schiefsymmetrischen Tensor des Stromes in R_6 bezeichnet. Im Falle des Überganges von R_6 zu der physikalischen Welt R_4 soll vorausgesetzt werden, daß sämtliche Feldgrößen von x_5 und x_6 unabhängig sind. Dann läßt sich zeigen, daß die Komponenten des Tensors $a_{\lambda\beta\gamma}$, die elektrische und magnetische Feldstärke, die Gravitationsfeldstärke, die quasidelektrische Feldstärke des anderen Teils des Bifeldes, die quasimagnetische Feldstärke und die Quasigravitationsfeldstärke zusammenfassen. J. I. Horváth.

Quantentheorie:

Costa de Beauregard, Olivier: Une réponse à l'argument dirigé par Einstein, Podolsky et Rosen contre l'interprétation bohrienne des phénomènes quantiques. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 1632—1634 (1953).

Ludwig, G.: Der Meßprozess. Z. Phys. 135, 483—511 (1953).

Es wird das für die Interpretation der Quantentheorie wichtige Problem des Zusammenhanges zwischen den (gewöhnlich allein diskutierten) idealisierten Meßprozessen und den wirklichen Meßprozessen untersucht, bei denen in einem gewissen Sinne irreversible „Dokumente“ erzeugt werden. Verf. glaubt die Lösung in den thermodynamischen Eigenschaften makroskopischer Meßinstrumente zu finden. Bei der quantenmechanischen Behandlung der Thermodynamik hätte Ref. gern Ähnlichkeiten mit und Unterschiede zu der klassischen Arbeit von v. Neumann

(später neu aufgegriffen durch Pauli und Fierz) diskutiert gesehen. Dem Ref. erscheint übrigens bemerkenswert, daß nicht nur im wirklichen Meßprozeß objektivierbare Situationen erzeugt werden, sondern daß es offenbar auch typisch quantenmechanische Prozesse gibt, die eine vom Meßprozess unabhängige objektive Realität besitzen (Energieerzeugung in Sternen, Atombombe).
G. Lüders.

Shimose, Tsuneto and Chohko Fujita: On the theory of quantization for particle dynamics in non-canonical formalism. Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 4, 55—63 (1953).

Verf. bringt ein allgemeines Quantisationsverfahren in Vorschlag, welches die bekannten Methoden von Feynman [Rev. Mod. Phys. 20, 367—387 (1948)] und Schwinger (dies. Zbl. 43, 422) als spezielle Fälle enthält. Bezeichnet $q = q(x, t)$ die Gleichung der klassischen Teilchenbahnen, wo die verschiedenen Bahnen durch den Parameter x unterschieden werden, dann läßt sich bezüglich der Transformation $(q, t) \leftrightarrow (x, t)$ im Falle, wenn $\partial q / \partial x$ nur von x abhängt, in der Form $\delta q = \delta Q + \dot{q} dt$ (mit $Q = \int_{x_0}^x \frac{\partial q}{\partial x} dx$) darstellen, bzw. im Falle wenn $\partial q / \partial x$ auch von t abhängig ist, wird eine neue Variable $Q(x, t)$ durch $\partial Q / \partial x = \partial q / \partial x$ eingeführt — ohne daß $\partial Q / \partial t$ eindeutig bestimmt wäre — und δq in der Form $\delta q = \delta Q - (\dot{q} - \dot{Q}) dt$ angegeben (die kleinen Buchstaben q usw. die Variablen der Lagrangeschen bzw. die großen Buchstaben Q usw. die Variablen der Hamiltonschen Funktion bezeichnen). Es läßt sich ohne weiteres einsehen, daß die beiden Ausdrücke von δq , die den Zusammenhang zwischen den Lagrangeschen und Hamiltonschen Variablen angeben, der Schwingerschen Relation entsprechen. In der quantisierten Theorie des Verf. werden zwei Operatoren P und L eingeführt, die den Vertauschungsrelationen $[P, Q] = \hbar i$ bzw. $[L, Q] = (\hbar i) \partial Q / \partial t$ genügen und mit deren Hilfe sich die Variation von Q in der Form $i \hbar \delta Q = [Q, P \delta q - P \dot{q} dt - L \delta t]$ schreiben läßt. Man kann aber L als Lagrangesche Funktion der Variablen q, \dot{q}, t interpretieren und das Integral der letzten Gleichung in der Form $Q(x, t) = U Q_0(x_0, t_0) U^{-1}$ (mit $U = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x P dq - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t (P \dot{q} - L) dt \right\}$) angeben; wodurch der Zusammenhang zwischen der Feynmanschen Theorie und der Theorie des Verf. schon leicht eingesehen werden kann. Mit Hilfe dieses Formalismus lassen sich einige bekannte Spezialfälle einfach behandeln.
J. J. Horváth.

Brdička, M.: A remark on proper Lorentz transformation of Dirac's equation. Acad. Tchèque Sci., Bull. internat., Cl. Sci. math. natur. méd. 51 (1950), 101—108 (1953).

Mit Hilfe sehr umfangreicher Rechnungen stellt Verf. explizite Formeln für die Transformation eines Diracspinors bei einer allgemeinen (eigentlichen) Lorentztransformation auf. Während für die Lorentztransformation keine Einschränkung gemacht wird, werden für die Diracmatrizen die bekannten speziellen Darstellungen benutzt.
F. Penzlin.

Cap. Ferdinand: Zur Kopplung eines Dirac-Feldes mit Bosonen vom Spin 1. Acta. phys. Austr. 8, 191—197 (1953).

Hamilton, J.: The Fredholm theory of the S matrix. Phys. Review, II. Ser. 91, 1524—1526 (1953).

Es wird untersucht, ob die Konvergenz der Störungstheorie für die S -Matrix verbessert wird durch Übergang zur Fredholmschen Reihe. Das Resultat ist negativ.
W. Brenig.

Matveev, A. N.: Die Operatorenmethode in der Quantentheorie des Feldes. Vestnik Moskovsk. Univ. 8, Nr. 10 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 7) 99—104 (1953) [Russisch].

Stueckelberg, E. C. G. et A. Petermann: La normalisation des constantes dans la théorie des quanta. Helvet. phys. Acta 26, 499—520 (1953).

Im Rahmen der Stueckelberg'schen Formulierung der quantisierten Feldtheorie wird das Problem der Renormierung genauer untersucht. Hierbei wird von der, für den vorliegenden Zweck geeignet erweiterten, Distributionsanalyse Gebrauch gemacht. Es ergeben sich dabei unbestimmte Konstanten, die den üblichen Renormierungskonstanten entsprechen.

G. Lüders.

Rayski, Jerzy: Über die Renormierungstechnik in der Quantenelektrodynamik. Fortschr. Phys. **1**, 164—183 (1953).

Ein Überblick über den Stand der Renormierungstheorie wird gegeben. Die Vakuumpolarisation durch ein äußeres Feld wird in erster Näherung im Heisenbergbild als Beispiel ausführlich durchgerechnet.

K. Baumann.

Petermann, A.: Renormalisation dans les séries divergentes. Helvet. phys. Acta **26**, 291—299 (1953).

Steinwedel, Helmut: Strahlungsdämpfung und Selbstbeschleunigung in der klassischen Theorie des punktförmigen Elektrons. Fortschr. Phys. **1**, 1—28 (1953).

Bericht über die einschlägigen Arbeiten bis zum Jahre 1952. Die Behandlung ist durchweg unrelativistisch und hauptsächlich auf den Zusammenhang zwischen der Selbstbeschleunigung und der unendlichen Selbstenergie geladener Teilchen abgestellt. Die Strahlungskraft wird nach Dirac berechnet. Das Maßäquivalent ihres unendlichen Anteils, der proportional \dot{v} ist, wird zur Ruhmasse geschlagen und bedeutet eine Renormierung. Die Selbstbeschleunigung wird berechnet für freie und quasielastisch gebundene Elektronen. Es wird klar gemacht, daß ihr Energiebedarf aus der unendlichen Selbstenergie gedeckt wird, und hervorgehoben, daß der bestimmende Exponent mit $1/c^2$ geht, so daß man im allgemeinen nicht berechtigt ist, nach Potenzen von v^2 zu entwickeln. Selbstbeschleunigung ist, solange man an den Maxwell'schen Gleichungen festhält, nur durch speziell gewählte Anfangsbedingungen zu vermeiden; adiabatische Einschaltung äußerer Felder genügt nicht. — Abänderungen der Feldgleichungen durch Strukturfunktionen unter Erhaltung ihrer Linearität wahrscheinlich auch nicht. Ein Vorschlag von Kampens, über dessen kanonische Behandlung des Problems (dies. Zbl. **45**, 281) ausführlich berichtet wird, die Selbstbeschleunigung durch Weglassung der schuldigen Terme in der Hamiltonfunktion zu beseitigen, läßt leider nicht erkennen, welche Veränderungen die Maxwellgleichungen dadurch erleiden. Quantentheoretisch tritt die Selbstbeschleunigung ebenfalls auf, da nach Morpurgo (dies. Zbl. **48**, 221) für die Erwartungswerte der Koordinaten und ihrer Ableitungen wieder die klassische Gleichung gilt. Daß sie sonst nicht in Erscheinung tritt, wird darauf zurückgeführt, daß fast immer mit einer nach Potenzen von v^2 fortschreitenden Störungsrechnung gearbeitet wird, bei der sie klassisch auch nicht auftritt.

W. Wessel.

Senitzky, I. R.: Interaction between electron and quantized electromagnetic field. Phys. Review, II. Ser. **91**, 1309—1311 (1953).

Bloch-Nordsieck-Methode für den Spezialfall eines quantisierten Maxwellfeldes in einem Kasten endlichen Volumens (Hohlraumresonator).

G. Lüders.

Demeur, Marcel: Étude de l'interaction entre le champ propre d'une particule et un champ électromagnétique homogène et constant. Acad. Roy. Belgique. Cl. Sci., Mém., Coll. 8° **28**, Nr. 5, 98 p. (1953).

In dieser Diss. wird eine „représentation d'interaction liée“ entwickelt, die mit Furrys „bound state representation“ im wesentlichen identisch ist, und für die Berechnung von Strahlungskorrekturen zu magnetischen Momenten verwendet. Die Behauptung des Verf., daß diese Darstellung die Ladungsrenormierung überflüssig macht, vermag Ref. allerdings nicht zu glauben. Außerdem hat ihn die parallele Behandlung von geladenen Teilchen in konstanten homogenen elektrischen und magnetischen Feldern nicht überzeugt; die physikalische Situation scheint ihm in beiden Fällen sehr verschieden zu sein, insbesondere dürfte es im homogenen elektrischen Feld keine auch nur annähernd stationären Zustände geben.

G. Lüders.

Glauber, A. E. und I. R. Juchnovskij: Über „Superpositions“-Approximation in der Theorie der Systeme von Teilchen in Wechselwirkung. Doklady Akad. Nauk. SSSR, n. Ser. **93**, 999—1002 (1953) [Russisch].

● **Heisenberg, W.:** Nuclear physics. London: Methuen & Co. 1953. 12 s. 6 d. net.

● **Beckerley, J. G. (edited by):** Annual reviews of nuclear science. Vol. 2. Stanford, Calif.: Annual Reviews, Inc. 1953. X, 429 p. \$ 6,—.

• Fortet, Robert: *Applications de la statistique à la physique nucléaire.* (Monografías de Ciencia Moderna. Nr. 40.) Madrid: Consejo superior de Investigaciones Científicas. Departamento de Estadística 1953. 56 p.

Die Arbeit enthält Vorlesungen, die Verf. an der Universität von Madrid gehalten hat. Sie besteht aus zwei Kapiteln. Kap. I. gibt eine Übersicht über das Wesen der Monte-Carlo Methode und ihrer Anwendungen in der Kernphysik, besonders beim Neutronendiffusionsproblem in der Theorie der Reaktoren, ferner bei der numerischen Berechnung der Eigenwerte der Schrödingerschen Gleichung, wobei Verf. die Methode von M. Kac und M. D. Donsker [J. Res. nat. Bur. Standards 44, 551—557 (1950)] darstellt. Kap. II beschäftigt sich mit Kaskadenprozessen (branching processes). Diese Prozesse werden folgendermaßen definiert: Im Zeitpunkt t seien gewisse Individuen anwesend, die als Elemente eines Raumes χ aufgefaßt werden können; zu jedem Zeitpunkt t gehört also eine zufällige Maßfunktion $\nu(A, t)$, die die Anzahl der im Zeitpunkt t anwesenden und zu $A \subset \chi$ gehörigen Individuen angibt. Die zufällige Maßfunktion $\nu(A, t)$ kann als Wert eines zufälligen Prozesses aufgefaßt werden; falls dieser Prozeß die Markoffsche Eigenschaft besitzt, so wird dieses Schema ein Kaskadenprozeß genannt. Verschiedene Beispiele, besonders die in der Theorie der kosmischen Strahlung vorkommenden Kaskadenprozesse, werden diskutiert.

A. Rényi.

Landau, L. und I. Pomerančuk: *Grenzen für die Anwendbarkeit der Theorie der Bremsstrahlung der Elektronen und der Paarbildung bei großen Energien.* Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 535—536 (1953) [Russisch].

Logunov, A. A. und Ja. P. Terleckij: *Über die Energieverteilung der Teilchen der primären kosmischen Strahlung.* Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz. 17, 119—135 (1953) [Russisch].

The acceleration of cosmic rays in the interstellar space is considered on the basis of statistical acceleration in turbulent magnetic fields. It is argued that the hydro-magnetic turbulent motion results in an exponential rise of the field strength, $H(t + \tau) = H(t) \exp(\xi \tau)$, within the correlation time, τ_c , which is introduced as the time scale for the correlation of fluctuations in the magnetic field strengths and equals to the dimension of pulsation, L_c , divided by the velocity V_c , $\tau_c = L_c/V_c$. ξ is regarded as random variable and the probability distribution of ξ , $W(\xi, t)$ is determined by a differential equation of the Kolmogorov type. An explicit solution of W is given by $W(\xi, t) = W_0 \exp(-\xi^2/4Dt)$, where $D = V_c/8L_c$. With this probability distribution the rate of energy gain is obtained as

$$\alpha \bar{E}/dt = \frac{1}{4} D \bar{E}, \quad dE^2/dt = DE^2.$$

This is more efficient than the Fermi mechanism: in the latter case $D \propto V^2/cL$. The distribution function, $f(t, r, E)$, is obtained for a given source Q by solving the diffusion equation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{c}{3} \nabla_r f = \frac{\partial^2}{\partial E^2} \left(\frac{DE^2}{4} f \right) + \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{DE}{4} f \right) - \frac{\partial}{\partial E} (\beta E^2 f) + \frac{1}{T_n} f = Q$$

by taking into account the energy loss due to the magnetic bremsstrahlung, $dE/dt = -\beta E^2$ and the nuclear collision of the mean free time T_n . The mean free path for the diffusion in space, λ , is approximately equal to $E/\pi e H$ for the given average field strength of magnetic fields H . The diffusion equation is solved for some special cases, for example, for $\beta = 0$, as well as for the general case. In the general case f is expressed in the form of a complicated series. At large energies the stationary solution becomes as simple as $f(r, E) \propto E^{-2.5} \exp(-4\beta E_r D)$.

S. Hayakawa.

Landau, L. und I. Pomerančuk: *Elektronen-Lawinenprozesse bei überhohen Energien.* Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 735—738 (1953) [Russisch].

Die vorliegende Arbeit bringt die Fortsetzung der in Doklady Akad. Nauk SSSR. n. Ser. 92, 535—536 (1953) entwickelten Ideen der Verfasser. Die Theorie von Bethe und Heitler (BH) (dies. Zbl. 9, 336) der Bremsstrahlung und Paarerzeugung versagt bei hohen Energien E wegen nicht-berücksichtigter Vielfachstoßprozesse. Die Verf. geben eine allgemeinere Theorie an, die mit Hilfe der Fermischen Streutheorie [s. Rossi, Greisen, Reviews modern Phys. 13, 263 (1941)] im passenden Energiebereich in die BH-Theorie überführt werden kann. Unterschiedlich zu BH ergibt sich für die Bremsstrahlung bei hohen Energien ein anderes Energieverlustgesetz: die Länge, auf der größenordnungsmaßig die Energie E emittiert wird, geht mit wachsender Energie proportional zu $1/E$. W. Klose.

Meerovič, L. A.: Zur Berechnung der nichtmonotonen Übergangsfunktionen der Mehrkaskadensysteme. Žurn. techn. Fiz. 23, 2056—2066 (1953) [Russisch].

Lenard, Pal: Über eine neue Lösung des Problems der Fluktuation der Ionisationsverluste. Vestnik Moskovsk. Univ. 8, Nr. 6 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 4) 111—116 (1953) [Russisch].

Die für kleine Energieverluste gültige Landausche Lösung des Problems wird durch eine Reihenentwicklung nach der übertragenen Energie verbessert, deren erstes Glied die Lösung von Landau ergibt. Für den Fall, daß die vollen Ionisationsverluste bedeutend größer sind als die Energie, die das Elektron in einer Kollision maximal erhält, wird die Lösung durch eine diesem Grenzfall entsprechende Reihenentwicklung erhalten. K. Baumann.

Landau, L. D.: Über die Vielfacherzeugung von Teilchen bei Zusammenstößen schneller Teilchen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz. 17, 51—64 (1953) [Russisch].

Bau der Materie:

Hurley, A. C. and Sir John Lennard-Jones: The molecular orbital theory of chemical valency. XII: The excited states of diatomic molecules. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 216, 1—10 (1953).

Hurley, A. C.: The molecular orbital theory of chemical valency. XIII: Orbital wave functions for excited states of a homonuclear diatomic molecule. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 216, 424—433 (1953).

Hurley, A. C. and Sir John Lennard-Jones: The molecular orbital theory of chemical valency. XIV: Paired electrons in the presence of two unlike attracting centres. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 218, 327—333 (1953).

Hurley, A. C.: The molecular orbital theory of chemical valency. XV: Illustrative calculations of the properties of polar bonds. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 218, 333—344 (1953).

Brickstock, A. and J. A. Pople: The spatial correlation of electrons in atoms and molecules. III: The influence of spin and antisymmetry on the correlation of electrons. IV: The correlation of electrons on a spherical surface. Philos. Mag., VII. Ser. 41, 697—704, 705—711 (1953).

Kovner, M. A. und V. N. Kapštal': Theorie der Aufspaltung der Schwingungsfrequenz von OH, bedingt durch den Tunneleffekt. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz. 17, 561—566 (1953) [Russisch].

Ishiguro, Eiichi: Tables useful for the calculation of the molecular integrals. IV. Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 4, 64—76 (1953).

Davydov, A. S.: Theorie der Absorption, Dispersion und Streuung des Lichts durch Lösungen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz. 17, 523—530 (1953) [Russisch].

Nach quantenmechanischen Methoden wird der Einfluß des Löser auf die Absorption, die Streuung und die Dispersion ohne detaillierte Voraussetzungen über das Modell des Löser untersucht. — Es wird vorausgesetzt, daß die Absorption

des Lichts von einem Molekül durch das Vorhandensein eines einzigen Erregungsniveaus mit der Energie E_i bedingt ist. Indem er voraussetzt, daß die Atome des Löser um die Gleichgewichtslagen schwingen (fester Löser), und die Wechselwirkung des Moleküls mit den Atomen des Löser berücksichtigt, findet der Verf. die Änderung der Energie beim Übergang des Moleküls der Beimengung aus dem Anfangszustand E_0 in den i -ten Erregungszustand ohne Änderung der Quantenzahlen n_s .

(Gekürzte Übersetzung aus Ref. Žurn. Fiz., 1955; Nr. 1521). *G. R.*

Schmutzer, Ernst: Die Rolle des Kovolumens in der Theorie starker konzentrierter Elektrolyte. *Wiss. Z. Univ. Rostock, math.-naturw. R.* **3**, 9—15 (1953).

Verf. benutzt an Stelle der Boltzmannschen Formel, welche das mittlere elektrische Potential mit der Verteilungsfunktion n_{ii} verbindet eine andere einparametrische Formel, die in ihrer analytischen Form bereits das Eigenvolumen der Ionen mitberücksichtigt. Eine Anwendung erfolgt auf die Theorie der Aktivitätskoeffizienten, Diffusionskoeffizienten und Diffusionspotentiale. *G. Kelbg.*

Walther, A. und K.-J. Lesemann: Instrumentelle Bearbeitung der Differentialgleichung einer Funkenstrecke. *Z. Phys.* **135**, 658—664 (1953).

Die Funkendifferentialgleichung von W. Weizel

$$2y + By^2 + \frac{1}{2}K^2(y dy/dx)^2 + 2x^2 - 2 = 0$$

mit der Anfangsbedingung $y = 0$ für $x = 1$ wird mit der Integrieranlage IPM-Ott für verschiedene Parameterkombinationen B und K gelöst. Sonderfälle werden formelmäßig erledigt. Aus den von der Integrieranlage gelieferten Lösungen wird der zeitliche Ablauf des Funkens durch ein gemischt formelmäßig-instrumentelles Vorgehen ermittelt. *Fr.-A. Willers.*

Cyril, L. É.: Zur Theorie der bipolaren Korona. *Žurn. techn. Fiz.* **23**, 1788—1795 (1953) [Russisch].

Verf. gibt eine theoretische Ableitung der Strom-Spannungs-Charakteristik einer stationären Koronaentladung zwischen den Drähten einer Doppelleitung, wobei angenommen wird, daß der Strom von zwei Ionenarten entgegengesetzter Ladung und verschiedener Beweglichkeit getragen wird. Unter wesentlicher Berücksichtigung der Ionenrekombination im Entladungsraum werden zunächst die Grundgleichungen für beliebige Elektrodengeometrie angeschrieben und dann für die oben bezeichneten Verhältnisse spezialisiert. Die sich ergebende nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung für die elektrische Feldstärke (bzw. Energiedichte) wird bei vorgegeben gedachter Elektrodenfeldstärke mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens näherungsweise gelöst. Bei gegenüber dem Drahtabstand genügend kleinem Drahtradius ist der exakte Feldverlauf und damit der Trägererzeugungsmechanismus an den Elektronenoberflächen für die Charakteristik ohne Einfluß. Es ergibt sich gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Messungen von Popkov, wenn geeignete Werte für Ionenbeweglichkeit und Rekombinationskoeffizient zugrunde gelegt werden. *R. Lorenz.*

Jancel, Raymond et Théo Kahan: Théorie magnéto-ionique des gaz faiblement ionisés en présence d'un champ électrique oscillant et d'un champ magnétique constant. *J. Phys. Radium* **14**, 533—540 (1953).

Ziel der Arbeit ist es, aus der Boltzmannschen Gleichung eine Herleitung der allgemeinen Formel für die Bewegung von Elektronen in einem Gas zu geben, und zwar für den Fall eines konstanten magnetischen und eines zeitlich harmonischen elektrischen Feldes. Die Aufgabe ist gelöst, wenn man die Geschwindigkeitsverteilungen $f_1(v_1)$ und $f_2(v_2)$ der Gasmoleküle und der Elektronen kennt; allerdings gilt die Lösung nur für schwache Ionisation des Gases, ist aber sonst sehr allgemein und enthält als Sonderfälle die Formeln von Chapman u. Cowling, von Margenau, von Druyvesteyn usw. — Für die Gasmoleküle ist f die Maxwell'sche Verteilung. Für die Elektronen lautet die Boltzmannsche Verteilung ψ und s sind Stoßpara-

meter)

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \left[\vec{I}_2 \cos \omega t + \frac{e_2}{m_2} (\mathbf{v}_2 \wedge \vec{\mathfrak{H}}) \right] \text{grad } f_2 = \iiint (f_1' f_2 - f_1 f_2') |\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2| b \, db \, ds \, dv_1,$$

$$F_2 = \vec{I}_2 \cos \omega t + \frac{e_2}{m_2} (\mathbf{v}_2 \wedge \vec{\mathfrak{H}}).$$

Setzt man $f_2 = f_2^0 + (\vec{I}_2 \cdot \mathbf{v}_2) (\xi_2^1 \cos \omega t + \beta_2^1 \sin \omega t) + (\vec{\mathfrak{H}} \cdot \vec{I}_2) \mathbf{v}_2 (\xi_2^2 \cos \omega t + \eta_2^1 \sin \omega t)$, so ergeben sich nach der Methode von Picard und Enskog (in erster Näherung) für die fünf unbekannten Funktionen $f_2^0, \alpha_2^1, \beta_2^1, \xi_2^2, \eta_2^1$ fünf Gleichungen. Insbesondere für f_2^0 findet man

$$f_2^0 = C \cdot \exp \left[- \int_0^{V_1} \frac{6 m_2 v_2 A \, dv_2}{6 k T A + F_2^2 m_1 \lambda} \right], \quad \int_0^\infty f_2^0 dv_2 = n_2 \quad \text{mit} \quad z(v_2) = \frac{e_2^2 H^2 \lambda^2}{[m_2^2 (\lambda^2 \omega^2 + v_2^2)]},$$

$A(v_2) = [\lambda^2 \omega^2 (1 - z)^2 + v_2^2 (1 + z)^2] / (\lambda (1 + z))$ (λ = freie Weglänge). Aus diesem allgemeinen Ergebnis läßt sich dann eine Menge spezieller Formeln herleiten. Anschließend werden noch der Strom $I = n_2 e_2 v_2$ (v_2 = Diffusionsstrom), der Leitfähigkeitstensor, der dielektrische Tensor und der Hallkoeffizient angegeben und zum Schluß einige Bemerkungen über das Verhältnis der hier vorgebrachten Methode zu der sonst üblichen Methode der freien Weglänge angefügt.

R. Seeliger.

Feynman, R. P.: Atomic theory of the λ transition in helium. Phys. Review, II. Ser. **91**, 1291—1301 (1953).

Von Tisza ist darauf hingewiesen worden, daß die Phasenumwandlung 2. Ordnung, die das Helium durchmacht (wegen der charakteristischen Gestalt der spezifischen Wärme als Funktion der Temperatur meist λ -Punkt genannt) das Analogon der Einstein-kondensation beim idealen Bosegas sein könne. In der vorliegenden Arbeit wird versucht, die thermodynamischen Funktionen des realen Bosegases zu berechnen. Feynman geht von einer Darstellung der Zustandssumme durch „Pfadintegrale“ aus, die sich aus der von ihm früher angegebenen Darstellung der Quantenmechanik ergibt. An Hand dieser Darstellung wird plausibel gemacht, daß sich die potentielle Energie im wesentlichen durch Einführung einer effektiven Masse berücksichtigen läßt. Als Näherungsausdruck für die Zustandssumme ergibt sich dann

$$Q = \text{const} \int \sum_P \exp \left\{ - \frac{m'}{1 k T \hbar^2} (z_i - P z_i)^2 \right\} \varrho(z_1, \dots, z_N) dz_1 \dots dz_N$$

dabei geht die Summe über alle Permutationen der N Variablen, und $\varrho(z_1, \dots, z_N)$ soll das Absolutquadrat der Wellenfunktion des Grundzustandes sein. Eine näherungsweise Auswertung ergibt eine Phasenumwandlung dritter Ordnung wie beim idealen Bosegas. Es wird argumentiert, daß sich bei genauerer Rechnung eine Umwandlung zweiter Ordnung ergeben würde, wie sie beim flüssigen Helium tatsächlich vorliegt.

H. Koppe.

Horie, Chôji: Second sound in superfluid $\text{He}^3\text{-He}^4$ mixtures. Sci. Reports Tôhoku Univ., I. Ser. **37**, 349—355 (1953).

Es wird untersucht, inwieweit Messungen des 2. Schalls in $\text{He}^3\text{-He}^4$ Mischungen durch Erweiterungen der phänomenologischen Zweiflüssigkeitentheorie deutbar sind. In gewissen Fällen erweist sich die Annahme von Mazur und Prigogine, daß He^3 und die Normalphase von He^4 eine Flüssigkeit bilden, als gerechtfertigt. Dabei geht Verf. zunächst von einer „Dreiflüssigkeit“ aus und sucht gemeinsame Bewegungen.

W. Klose.

Fano, U.: Penetration of X- and gamma rays to extremely great depths. J. Res. nat. Bur. Standards **51**, 95—122 (1953).

Frühere Arbeiten über den asymptotischen Verlauf der Gamma-Intensität in großen Abständen von der Quelle werden neu untersucht und in verschiedener Hinsicht vervollständigt. Es stellt sich unter anderem heraus, daß das asymptotische Verhalten bei Berücksichtigung von Vielfachstreuung das gleiche ist wie in der „Geradeaus“-Näherung.

W. Macke.

Taylor, William J.: Fourier representation of Buerger's image-seeking minimum function. J. appl. Phys. **24**, 662—663 (1953).

Hayasi, Takesi und Shôzô Okada: Die angeregten Zustände eines atomaren Elektrons im eindimensionalen Kristallgitter. Sci. Reports Tôhoku Univ. I. Ser. **37**, 331—338 (1953).

Die angeregten Zustände eines einzelnen Elektrons in einem eindimensionalen rechteckigen Potential werden untersucht.

O. Madelung.

Hayasi, Takesi und Takasi Sagawa: Eine Art des Elektronenzustandes an einem Kristalldefekt. Sci. Reports Tôhoku Univ., I. Ser. **37**, 339—348 (1953).

Weiterführung der Theorie der Eigenfunktion von Elektronen in einem ein-dimensionalen rechteckförmigen periodischen Potential, dessen Periodizität an einer Stelle gestört ist. *O. Madelung.*

Tjablikov, S. V.: Fragen der Translationsinvarianz in der Theorie der adiabatischen Annäherung. Ukrain. mat. Žurn. 5, 152—158 (1953) [Russisch].

Im Anschluß an eine frühere Arbeit [Žurn. eksper. teor. Fiz. 21, 377—388 (1951); deutsche Übersetzung: Abh. aus der Sowj. Physik 4, 54—67 (1954)] und mit der gleichen Methode untersucht Verf. den Grundzustand eines Teilchens, das in starker Wechselwirkung mit einem Feld steht für den Fall, daß außerdem noch ein äußeres Potential auf das Teilchen wirkt. Das Teilchen hat „innere Freiheitsgrade“, die durch drei Oszillatoren beschrieben werden. Mit der Stärke des Potentials gehen die Frequenzen der drei Oszillatoren gegen Null. Die Schwingungs-Freiheitsgrade gehen in Translationsfreiheitsgrade über und der Hamiltonoperator wird translationsinvariant. — Mit diesem Ergebnis hat Verf. die von Bogoljubov (dies. Zbl. 41, 588) und ihm entwickelte Methode in engere Beziehung zu Pekars adiabatischer Näherung gebracht [Vgl. Fortschr. d. Phys. 1, 367 (1954)]. *G. Höhler.*

Wilson, A. H.: The diamagnetism of quasi-bound conduction electrons. Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 292—298 (1953).

Kohler, Max: Einfluß der Austauschwechselwirkung auf die Wärmeleitfähigkeit von Metallen. Abh. Braunschweig. wiss. Ges. 5, 48—52 (1953).

Über die spezifische Wärme wird ausgerechnet, daß sich die Wärmeleitfähigkeit bei hohen Temperaturen auf Grund der Elektronen-Austauschwechselwirkung erniedrigt. Dies führt zu einer besser mit dem Experiment übereinstimmenden Lorenzzahl bei den einwertigen Metallen. — Hierzu muß jedoch betont werden, daß die Bohm-Pines-Theorie bezüglich der Transporterscheinungen wenig am alten Einelektronen-Ergebnis ändert. Im übrigen kann man eine Erniedrigung der Lorenzzahl auch durch Berücksichtigung der Schallquanten außerhalb des Gleichgewichts bekommen. *B. Mühlischlegel.*

Smirnov, A. A.: Über den Einfluß von Löchern in den Knoten des Kristallgitters eines Metalls auf seinen elektrischen Widerstand. Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR 1953, 172—176 und russ. Zusammenfassg. 177 (1953) [Ukrainisch].

Madelung, Otfried: Der Leitungsmechanismus in homöopolaren Halbleitern. Ergebn. exakt. Naturw. 27, 56—124 (1953).

Die Theorie des festen Körpers läßt sich zweckmäßigerweise in die „Mikrotheorie“ und die „Makrotheorie“ unterteilen. Während die erstere auf streng quantentheoretischer Grundlage etwa die Bewegungszustände der Elektronen untersucht, die Energie-Bänder-Struktur herleitet und den Defektelektronenbegriff begründet, sieht die Makrotheorie die quasi-korpuskularen Eigenschaften von Elektron und Defektelektron als gegeben an und untersucht z. B. die Leitungsvorgänge mit Hilfe quasiklassischer Gleichungen. Der vorliegende Artikel gibt, in leicht faßlicher Darstellung, einen gedrängten Überblick über die „Makrotheorie“ des Leitungsmechanismus in homöopolaren Halbleitern. Nach einer Einführung in die Begriffsbildungen des Bändermodells, einer Übersicht über verschiedene Störstellenarten und die Elektronen-Defektelektronendichte im thermischen Gleichgewicht in Kapitel II folgt die Behandlung von Halbleitern mit homogener Störstellenverteilung im III. Kapitel. Hier werden die Leitungsvorgänge im elektrischen und magnetischen Feld (Leitfähigkeit, Hall-Effekt, Widerstandsänderung im Magnetfeld) behandelt, sodann Nichtgleichgewichtsprozesse (u. a. Rekombination von Ladungsträgern und Diffusion) und schließlich die Erzeugung von Nichtgleichgewichtszuständen, insbesondere durch Löcherinjektion, besprochen. Das Kapitel IV bringt einiges über Kontakte, während Kapitel V unter der Überschrift „Halbleiter mit inhomogener Störstellenverteilung“ die für die Anwendungen so wichtigen *p-n*-Übergänge behandelt. *H. Haken.*

Gubanov, A. I.: Die Theorien der Trockengleichrichter und der Kontakte der Halbleiter. II. Übersicht der ausländischen Literatur. Žurn. techn. Fiz. 23, 1287—1307 (1953) [Russisch].

Schuster, Kurt und Rudolf Meier: Zur Theorie der Dickenschwingungen piezoelektrischer Kristallplatten. Jenaer Jahrbuch 1953, 246—254 (1953).

Im Hinblick auf die Frage nach der günstigsten Schnitttrichtung wird theoretisch beschrieben, wie die Amplitude der Dickenschwingung einer angeregten piezoelektrischen Kristallplatte von deren Schnitttrichtung abhängt. Die Berechnung der Schnitttrichtung mit maximaler Amplitude der Dickenschwingung wäre danach sehr kompliziert. Es zeigt sich aber, daß man in dem sogenannten *L*-Schnitt im allgemeinen nicht die günstigste Schnitttrichtung hat.

H. Marx.

Vol'kenštejn, M. V. und É. K. Bjutner: Über den kreisförmigen (zyklischen) Dichroismus in Kristallen. *Žurn. éksp. teor. Fiz.* 23, 584–587 (1953) [Russisch].

Die Verf. gehen bei der theoretischen Behandlung des Dichroismus in Kristallen aus von der bekannten Modellvorstellung der Wechselwirkung der Lichtwelle mit einer Kette gekoppelter Oszillatoren, deren Schwingungsrichtungen paarweise senkrecht zueinander liegen und von denen jeder mit den beiden ihm benachbarten elastisch gekoppelt ist, derart, daß für die eine Kette die Schwingungsgleichungen

$$(k - m\omega^2)x_s = k'(y_{s+1} - y_{s-1}); \quad (k - m\omega^2)y_{s+1} = k'(x_s - x_{s+2}),$$

für die andere Kette die entsprechenden Schwingungsgleichungen

$$(k - m\omega^2)x_s = k'(y_{s-1} - y_{s+1}); \quad (k - m\omega^2)y_{s+1} = k'(x_{s+2} - x_s)$$

gelten, aus denen $x_s = \cos 2\pi p s$; $y_s = \sin 2\pi p s$ bzw. $x_s = \cos 2\pi p s$; $y_s = -\sin 2\pi p s$ mit $\omega^2 = k/m - (2k'/m)\sin 2\pi p$ folgt mit $-\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{1}{4}$. Aus den Grenzbedingungen an den Enden der Kette, nämlich $y = 0$, $x_{N+1} = 0$ folgt $p = (2s-1)/4(N-1)$ mit s ganzzahlig, N ganzzahlig und $-N/2 \leq s \leq (N/2)-1$, so daß N verschiedene Eigenfrequenzen $\omega_s^2 = k/m - (2k'/m)\sin\{(2n+1)\pi/2(N+1)\}$ sind. Es wird die Übergangsmatrix von kartesischen zu Normalkoordinaten angegeben. Mit dem komplexen Brechungsindex $\tilde{n} = n + iz$ und der komplexen Konstanten des Drehungsvermögens $\tilde{\gamma} = \gamma + i\gamma'$ gilt für den zirkularen Dichroismus $T = 1/\pi \{ \gamma' n / (n^2 + \kappa^2) - \gamma \kappa / (n^2 + \kappa^2) \}$. Für den Fall, daß das Medium aus einzelnen Molekülen besteht, von denen jedes ein System gekoppelter Oszillatoren mit kleinen Abmessungen darstellt, werden die Tensoren der Polarisation und des Drehungsvermögens angegeben und näher diskutiert sowie für T der Näherungswert $T_j = 1/\kappa_j [\gamma'_j / (1 + \kappa_j^2)]$ mit Bezug auf den j -ten Oszillator angegeben, indem $n = 1$ und $\gamma = 0$ gesetzt wurde und in dem γ'_j, κ_j Ausdrücke sind, die formelmäßig angegeben werden. Es folgen weitere Diskussionen über die Möglichkeit der vollständigen zirkularen Polarisation der Spektrallinien in Abhängigkeit von der Länge der Kette der gekoppelten Moleküle.

J. Picht.

Taksar, I. M. und Z. Ja. Plume: Einige Grenzwertprobleme der Theorie der Impulsmagnetisierung. *Akad. Nauk Latvjijskoj SSR. Trudy Inst. Fiz.* 6, 21–38 (1953) [Russisch].

Unter der Annahme, daß die magnetischen Permeabilitäten der betrachteten ferromagnetischen Medien von der magnetischen Feldstärke in denselben Medien unabhängig sind, werden strenge Lösungen für die folgenden drei Aufgaben angegeben: 1. Die Ausbreitung des magnetischen Feldes in zwei unendlich langen leitenden coaxialen Kreiszylindern mit ungleicher magnetischer Permeabilität, wenn diese Zylinder plötzlich in ein konstantes homogenes magnetisches Longitudinalfeld hineingebracht werden. 2. Die Ausbreitung des magnetischen Feldes in einem unendlich langen leitenden Kreiszylinder, wenn dieser Zylinder plötzlich in ein nach dem Exponentialgesetz abnehmendes homogenes Longitudinalfeld hineingebracht wird. – 3. Die Ausbreitung des magnetischen Feldes in zwei unendlich langen leitenden coaxialen Kreiszylindern, wenn sie plötzlich in ein nach dem Exponentialgesetz abnehmendes homogenes Longitudinalfeld hineingebracht werden.

R. I. Ja. (Übersetzt aus R. Ž. Fiz., 1955).

Ginzburg (Ginsburg), V. (W.) L.: Der gegenwärtige Stand der Theorie der Supraleitung. *Fortschr. Phys.* 1, 101–163 (1953). Übersetz. aus *Uspechi fiz. Nauk* 48, Nr. 1, 25 ff. (1952).

Vorliegende Arbeit gibt eine Übersicht über den Stand des Problems, eine Mikrotheorie der Supraleitung zu schaffen, wie es sich im Jahre 1952 präsentierte. Ob schon demzufolge in vieler Hinsicht überholt, ist sie ein noch heute (1958) lesenswerter Beitrag, der besonders die Überlegungen russischer Forscher nahebringt. Zunächst wird die sogenannte Hypothese der spontanen Ströme diskutiert und abgelehnt, womit wohl heute jedermann einig geht. (Allerdings kann man mit des Verf. Ablehnung des bekannten Bloch'schen Theorems nicht einig gehen: auch bei den vom Verf. als Beispiel zitierten Atomen, die einen *P*-Zustand als Grundzustand haben, ist bei Abwesenheit eines äußeren Magnetfeldes der exakte Grundzustand nicht entartet und stromlos.) Der nächste Abschnitt über die diamagnetische Hypothese führt an Hand von Beispielen zur Londonschen Forderung, daß für das Auf-

treten eines Meissnereffekts die Wellenfunktion der Elektronen im Metall „starr“ sein soll. Der Erfolg dieser Vorstellung wird am Beispiel des (hier erstmalig behandelten) kondensierenden idealen Bosegases dargestellt. Es wird dann geschlossen, daß das Auftreten einer Lücke im Anregungsspektrum der Elektronen zu einem Auftreten von Supraleitung führen würde (eine Vorstellung, die seither von Bardeen übernommen wurde). Anschließend wird gezeigt, daß die (damals neue) Fröhlichsche Theorie keine Supraleitung liefert. Der letzte Abschnitt ist einer sog. „quasi-mikroskopischen“ Theorie der Supraleitung gewidmet, die auf folgendem beruht: Aus der Tatsache, daß das Gas-Modell für die Metallelektronen theoretisch schlecht begründet ist, schließt Verf., daß es unzulänglich sei und, daß die Elektronen eher eine Flüssigkeit als ein Gas bilden; die Erfolge des Gas-Modells werden allerdings so recht rätselhaft. Auf diese „Elektronenflüssigkeit“ im Metall wird dann die Landausche Theorie des flüssigen Heliums angewendet, die Supraleitung also als Suprafluidität der Elektronenflüssigkeit gedeutet. Unerklärt bleiben so allerdings die Existenz von Nicht-Supraleitern, der Übergang zum (zumeist unverständenen) normalen Zustand u. a. m. Außerdem spielt die Existenz der von Landau vorgeschlagenen, aber nie recht nachgewiesenen riesigen Dielektrizitätskonstante der Supraleiter eine große Rolle in dieser Theorie, die als Zwischenstufe zwischen Mikro- und Makro-Theorie angesehen wird.

M. R. Schafroth.

Philbert, Georges: Loi de répartition des supra-courants entre supra-conducteurs parallèles. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1148—1151 (1953).

Das Gesetz der Stromverzweigung für Supraleiter unter Berücksichtigung der gegenseitigen Induktion, durch von Laue (Theorie der Supraleitung, dies. Zbl. **33**, 240) für eine einfache Verzweigung aufgestellt, wird auf eine n -fache Verzweigung verallgemeinert.

F. Beck.

Lifšic, I. M.: Die Kinetik der Zerstörung der Supraleitfähigkeit durch ein veränderliches Feld ($\omega \lesssim 10^6 \text{ sec}^{-1}$). Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **90**, 363—366 (1953) [Russisch].

Untersucht wird die Kinetik der Phasengrenze zwischen Supra- und Normalleiter in einem hochfrequenten Magnetfeld, dessen Amplitude größer als H_k (kritisches Feld), dessen Mittelwert jedoch kleiner als H_k ist. Unter den Bedingungen unendlicher supraleitender Halbraum ($z > 0$), Magnetfeld parallel der Oberfläche und Eindringtiefe des Feldes in den supraleitenden Bereich klein gegen die maximale Zerstörungstiefe der supraleitenden Phase werden die Maxwell'schen Gleichungen behandelt. Die dann gültigen Grenzbedingungen sind: $\dot{z}(t)$ gibt die z -Koordinate der Phasengrenze an; $H_{\perp} = H_k(\omega t)$, $E_{\perp} = \dot{z}(t) \cdot \omega = H_k \dot{z}(t) / c$; $H_{\parallel} = z(t) \cdot \omega = H_k$. Die letzte dieser Bedingungen entspricht der trägheitslosen Bewegung der Phasengrenze. Falls Relaxationserscheinungen ins Spiel kommen, ist sie zu ersetzen durch $H(\dot{z}) = H_k(1 - \dot{z}/v_0)$, mit einer charakteristischen Geschwindigkeit v_0 . Eine Näherungslösung wird gefunden für kleine überkritische Amplituden. Für große Amplituden wird unter Beschränkung auf Rechteck-Impulse eine in einer früheren Arbeit [Žurn. eksper. teor. fiz. **20**, 834 (1950)] gefundene quasistationäre Lösung übernommen. Die Abhängigkeit der maximalen Zerstörungstiefe z_{max} von der Frequenz ω ergibt sich als $z_{\text{max}} \sim \omega^{-1/2}$. Bei starken Relaxationserscheinungen kommt jedoch $z_{\text{max}} \sim \omega^{-1}$, dieselbe Abhängigkeit folgt auch bei Hemmung des Vorganges durch große Keimbildungszeit der normalleitenden Bereiche. Überwiegendes Auftreten beider Effekte liefert $z_{\text{max}} \sim \omega^{-2}$.

F. Beck.

Lifšic, I. M. und M. I. Kaganov: Die Kinetik der Zerstörung der Supraleitfähigkeit durch ein Feld von hoher Frequenz. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **90**, 529—531 (1953) [Russisch].

Stratton, R.: The surface free energy of a metal. I: Normal state. II: Superconducting state. Philos. Mag., VII. Ser. **41**, 1236—1246, 1247—1258 (1953).

Behandlung eines freien Elektronengases in einem Potentialtopf endlicher Tiefe. In x - und y -Richtung werden periodische Randbedingungen angenommen, während in z -Richtung die Randbedingung durch Potentialsprünge der Höhe Φ an den Stellen $\pm L_x(1 \pm d/L_z)$ gegeben ist. Das Modell entspricht somit physikalisch einer unendlich ausgedehnten Platte der Dicke $2L_z$. Die Verschiebung des Potentialsprungs um die Strecke d gegenüber der Begrenzung des Gitters ($\pm L_z$) ist zur Erreichung der Elektroneutralität im Innern der Platte notwendig, aus welcher Bedingung die Größe $d(\Phi)$ folgt. Durch Beachtung dieses Punktes unterscheidet sich

das Modell von einem früher von Huang und Wyllie [Proc. phys. Soc. London, Sect A **62**, 180 (1949)] benutzten. Summation der Einzelenergien über die besetzten Zustände im Wellenzahlraum (die mit Hilfe der Eulerschen Summenformel in ein Integral verwandelt wird) liefert die kinetische Gesamtenergie. Die darin auftretenden oberflächenproportionalen Terme werden als Oberflächenenergie σ des Kristalls gedeutet. Die elektrostatische Energie der an der Begrenzung auftretenden Doppelschicht wird abgeschätzt und gegenüber ersteren Termen klein gefunden. Ferner wird für endliche Temperaturen ein (stets negativer) Beitrag zu σ berücksichtigt, der von der Anregung von Gitterwellen herrührt. Die so berechnete Oberflächenenergie ist $\frac{1}{2}$ bis höchstens $2/3$ des experimentellen Werts bei den verschiedenen Metallen. Das Ergebnis drückt die Unzulänglichkeit der Näherung freier Elektronen aus. — Teil II behandelt die Elektron-Gitterwechselwirkung für die Platte endlicher Dicke entsprechend der Blochschen Theorie. Es wird hier aber ein ortsabhängiges Potential betrachtet und für die Elektronenwellenfunktionen das Produkt aus einer in z -Richtung laufenden Welle und einer zweidimensionalen Bloch-Welle in x - y -Richtung angesetzt. Für Amplituden und Wellenzahlspektrum des z -Anteils werden jedoch die einem konstanten Potential mit Sprüngen bei $-L_z(1 \mp d/L_z)$ entsprechenden Ergebnisse aus Teil I übernommen. Sodann Berechnung der durch die Gitterwechselwirkung hervorgerufenen Energiekorrektur in 2. störungstheoretischer Näherung, unter Verwendung der in Teil I entwickelten Summationstechnik. Es ergeben sich wiederum oberflächenabhängige Terme. Das Ergebnis wird benutzt, um den Energieunterschied der von Fröhlich (dies. Zbl. **37**, 430) für den supraleitenden Zustand angegebenen Verteilung zur gewöhnlichen Fermi-Verteilung zu berechnen. Der zur Oberfläche proportionale Anteil Δf soll der Differenz der Oberflächenenergien von supra- und normalleitendem Zustand entsprechen. Jedoch ergibt sich für das Verhältnis $\mu = 2/1/H_k^2$ (H_k : kritisches Magnetfeld), verglichen mit dem Experiment, ein um den Faktor 10 bis 100 zu kleiner Wert.

F. Beck.

Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

● **Trumpler, Robert J. and Harold F. Weaver:** Statistical astronomy. Berkeley and Los Angeles: University of California Press; London: Cambridge University Press 1953. XXI, 644, p. 570.

Fanzelau, G. und O. Lucke: Zur Frage der Erklärung des erdmagnetischen Kernfeldes. Forsch. Fortschritte **27**, 73—75 (1953).

Entgegnung auf eine von H. Haalek veröffentlichte Theorie des erdmagnetischen Kernfeldes. Der Haalekschen Theorie liegen die Prinzipien einer Boltzmann-Statistik für die freien Elektronen im Erdkern zugrunde, während man richtig die Fermi-Statistik anwenden muß.

W. Kertz.

Somigliana, Carlo: Clima matematico e paleoclimatologia. Rend. Sem. mat. fis. Milano **23**, 94—113 (1953).

Der Verf. gibt und diskutiert in eingehender Weise die Grundlagen der bekannten Theorie von Milankovitch über die „Théorie math. des phénomènes thermique produites par la radiation solaire“ (Paris 1920). Die Folgerungen, die sich aus ihr für die Erforschung des Klimas der geologischen Zeitalter ergeben, werden näher dargelegt.

A. Defant.

Capuano, Pasquale: La curva della rifrazione atmosferica. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl. **4**, Nr. 3/4, 50—58 (1953).

Capuano, Pasquale: L'atmosfera come lente convergente. Calcolo della distanza focale. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl. **4**, Nr. 3/4, 59—63 (1953).

Smoljakov, P. T.: Über das ebene Problem der stationären Bewegung in der Atmosphäre bei vollständiger oder teilweiser Unabhängigkeit von der Zähigkeit. Izvestija Kazansk. Fil. Akad. Nauk SSSR. Ser. fiz.-mat. techn. Nauk **3**, 54—58 (1953) [Russisch].

Betrachtet werden ebene, zähe, stationäre Bewegungen über einer Tangentialebene an die rotierende Erde. (Koordinaten x, y ; Geschwindigkeitskomponenten u, v). Verf. bestimmt insbesondere solche Strömungen, für die die Zähigkeitsterme in den Navier-Stokes Gleichungen verschwinden (kinematische Unabhängigkeit von der Zähigkeit). Er erhält für u, v lineare Funktionen in x, y und diskutiert die Stromlinien. Das Druckintegral $\int dp/\rho$ wird eine quadratische Funktion der Ortsvariablen. Abschließend werden einige Anwendungen sowie Erweiterungen gegeben.

J. Zierep.

Berichtigungen

zu den Bänden 44, 50, 51, 52, 53.

Zu Band 44 (Nachtrag):

Hittmar, O. and E. Schrödinger: Studies in the generalized theory of gravitation. II. The velocity of light. Commun. Dublin Inst. advanced Studies. Ser. A, Nr. 8. 15 S. (1951); dies. Zbl. 44, 229.

Der erstgenannte Verfasser heißt „O. Hittmair“. Eine entsprechende Korrektur ist in den Autorenregistern unter „Hittmar“ in Bd. 44, 464, Spalte 1 und Bd. 54, 163, Spalte 1 sowie unter „Schrödinger“ in Bd. 44, 472, Spalte 3 und Bd. 54, 220, Spalte 2 vorzunehmen.

Zu Band 50:

Nagler, H.: On a certain matrix product with specified latent roots. Proc. Edinburgh math. Soc., Ser. II 10, 21—24 (1953); dies. Zbl. 50, 11.

Der Name des Referenten ist *S. Vajda*.

Černikov, S. N.: Systeme linearer Ungleichungen. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 2 (54), 7—73 (1953) [Russisch]; dies. Zbl. 50, 12—14.

Auf S. 13 in Zeile 6 v. o. ist hinter „p. 40—45“ eine Klammer „)“ einzufügen.

Auf S. 14 in Zeile 19 v. u. des Referats lies zweimal „*k*-Begrenzung“ statt „*R*-Begrenzung“.

Račevskij, P. K.: Über einige fundamentale Sätze der Theorie der Lieschen Gruppen. Uspechi. mat. Nauk 8, Nr. 1 (53), 3—20 (1953) [Russisch]; dies. Zbl. 50, 25—26.

Auf S. 26 in Zeile 3 v. o. lies „ G_r'' “ statt „ G_r' “.

Flanders, Harley: The norm function of an algebraic field extension. Pacific J. Math. 3, 103—113 (1953); dies. Zbl. 50, 34—35.

Auf S. 35 in Zeile 6 v. o. füge „ f “ hinter „Homomorphismus“ ein.

Prachar, K.: On the sum $\sum_{p \leq x} \omega(f(p))$. J. London math. Soc. 28, 236—239 (1953); dies. Zbl. 50, 42.

In Zeile 3 v. u. des Referats lies „of the form“ statt „the of form“.

In Zeile 1 v. u. lies „, and the “ statt „. The“.

Ljapunov, A. A.: Über die Klassifikation der *R*-Mengen. Mat. Sbornik, n. Ser. 32, 255—262 (1953) [Russisch]; dies. Zbl. 50, 55—56.

Auf S. 55 in Zeile 2 v. o. des Referats lies „10“ statt „16“; das Zitat ist zu ergänzen durch den Hinweis: „s. Zbl. 53, 364.“

Lorch, Lee: Asymptotic expressions for some integrals which include certain Lebesgue and Fejér constants. Duke math. J. 20, 89—103 (1953); dies. Zbl. 50, 59—60.

Auf S. 60 in der letzten Zeile des Referats lies zweimal \int_a^b statt \int_0^b .

Chalanaj, A.: Über eine lineare Differentialgleichung mit fastperiodischen Koeffizienten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 88, 419—422 (1953) [Russisch]; dies. Zbl. 50, 87.

Der Verfasser ist identisch mit A. Halanay.

Tomlinson, Fort: Reducibility of linear differential and difference equations. J. London math. Soc. 28, 156—163 (1953), dies. Zbl. 50, 88.

Vor- und Familienname des Verfassers sind vertauscht: lies also: „Fort, Tomlinson“. Eine entsprechende Korrektur ist im Autorenregister vorzunehmen.

Feller, William: Semigroups of transformations in general weak topologies. *Ann. of Math.*, II. Ser. **57**, 287—308 (1953); dies. Zbl. **50**, 116.

In Zeile 6 v. u. des Referats lies „ $\|T_s^*\|_E$ “ statt „ $\|T_0^*\|_E$ “.

Papić, Payle: Sur une classe d'espaces abstraits. *C. r. Acad. Sci., Paris* **236**, 1843—1845 (1953); dies. Zbl. **50**, 167—168.

Überall im Referat lies „ R_f “ statt „ R “: vgl. dazu auch das Referat über eine Arbeit desselben Verf. in diesem Zbl. **57**, 388.

● Laue, M. v.: Die Relativitätstheorie. 2. Band: Die allgemeine Relativitätstheorie. (Die Wissenschaft. Band 68.) Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn 1953. 3. neubearb. Aufl. IV, 204 S. mit 12 Abh. DM 15,80; dies. Zbl. **50**, 213—214.

Auf S. 214 in Zeile 1 v. o. lies „ $\partial g_{ik}/\partial x^p$ “ statt „ $\partial g_{ik}/\partial x$ “.

Am Ende von Zeile 22 v. o. ist „ g “ zu tilgen.

Blaschke, W.: Vita ed opere del matematico Regiomontano. *Matematiche S.* **50**—58 (1953); dies. Zbl. **50**, 242.

Die Arbeit erschien in Heft Nr. 1 des Bandes der Zeitschrift.

Haupt, Otto und Christian J. Paue: Halobedingungen und Vitalische Eigenschaft von Somensystemen. *Arch. der Math.* **4**, 107—114 (1953); dies. Zbl. **50**, 278—279.

Auf S. 279 in der letzten Zeile des Referats füge „und $C_v \cap C \neq 0$ “ hinter „ $\mu(C_v) \leq \mu(C)$ “ ein.

Rajagopal, C. T.: On the relation of limitation theorems to high-indices theorems. *J. London math. Soc.* **28**, 322—329 (1953); dies. Zbl. **50**, 285.

In Zeile 8 v. u. des Referats lies „ $o(1)$ “ statt „ $O(1)$ “.

Amato, Vincenzo: Sull'integrazione di un sistema di equazioni differenziali lineari omogenee a matrice circolante u . *Matematiche S.* **23**—26 (1953); dies. Zbl. **50**, 315.

Die Arbeit erschien in Heft Nr. 1 des Bandes der Zeitschrift.

Agliata, Salvatore: Integrazione di particolari sistemi di due equazioni differenziali lineari e periodicità dei loro integrali generali. *Matematiche S.* **14**—22 (1953); dies. Zbl. **50**, 315.

Die Arbeit erschien in Heft Nr. 1 des Bandes der Zeitschrift.

Aržanyč, I. S.: Über die Integration eines kanonischen Systems von Gleichungen in exakten Differentialen. *Uspechi mat. Nauk S. Nr. 3* (55), 99—104 (1953); [Russisch]; dies. Zbl. **50**, 317.

Herr C. Orloff hat die Schriftleitung darauf aufmerksam gemacht, daß die in dieser Arbeit auseinandergesetzte Theorie sich bereits in mehreren Arbeiten von N. Salt'kyow findet [*Commun. Soc. math. Kharkow*, II. Sér. **5**, Nr. 5—6, 225—234 (1898); *Ann. Univ. Kharkow* **1899**, Nr. 3 (1899); vgl. auch die Referate im Jahrb. Fortschr. Math. **30** (1899), 318—320].

Fet, A. N.: Über die algebraische Anzahl der geschlossenen Extremalen auf einer Mannigfaltigkeit. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **88**, 619—621 (1953) [Russisch]; dies. Zbl. **50**, 327.

Der Verfasser heißt „A. I. Fet“.

Porcelli, Pasquale: Uniform completeness of sets of reciprocals of linear functions. *Duke math. J.* **20**, 185—193 (1953); dies. Zbl. **50**, 337.

In Zeile 3 2 v. u. des Referats ist der Satz von „Si K “ bis „rare.“ zu tilgen.

Feller, William: On the generation of unbounded semigroups of bounded linear operators. *Ann. of Math.*, II. Ser. **58**, 166—174 (1953); dies. Zbl. **50**, 342.

In Zeile 2 v. o. des Referats sind hinter „E. Hille“ bzw. „the reviewer“ die Zitate „, this Zbl. **33**, 65,“ bzw. „, this Zbl. **37**, 353“ einzufügen.

Wasaw, Wolfgang: Metodi probabilistici per la risoluzione numerica di alcuni problemi di analisi. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 248—250 (1953); dies. Zbl. 50, 352.

Der Verfasser heißt „Wolfgang Wasow“.

Komatu, Ysaku: Probability-theoretic investigations on inheritance. IV₇, IV₈. Mother-child combinations. V₃. Brethren combinations. Proc. Japan Acad. 29, 68—71, 72—77, 78—82 (1953); dies. Zbl. 50, 366.

In Zeile 2 v. o. des Referats lies „if in case of“ statt „in case of“.

Penrose, L. S.: The general purpose sib-pair linkage test. Ann. Eugenics 18, 120—124 (1952); dies. Zbl. 50, 366.

Die Arbeit erschien nicht „1952“ sondern „1953“.

Dmitriev, A. A. und T. V. Bonkavskaja: Zur Frage der Turbulenz in einer Welle. Doklady Akad. Nauk SSSR. N. Ser. 91, 31—33 (1953) [Russisch]; dies. Zbl. 50, 416.

Der zweite Verfassersname lautet „T. V. Bonkovskaja“.

Watt, James R.: A conducting permeable sphere in the presence of a coil carrying an oscillating current. Canadian J. Phys. 31, 670—678 (1953); dies. Zbl. 50, 417.

Der Verfasser heißt „James R. Wait“.

Emerleben, Otto: ber das Restglied der Gitterenergieentwicklung neutraler Ionengitter. (Georg Hamel zum 75. Geburtstag gewidmet.) Math. Nachr. 9, 221—234 (1953); dies. Zbl. 50, 448.

In Zeile 4 v. u. des Referats lies $\sum_{k=0}^p b_{p-k} n^{p-k} z(n)$ statt $\sum_{k=0}^p b_{p-k} n^{p-k} z(n)$.

Autorenregister:

Auf S. 466 in Spalte 2 unter Kimpara lies „385“ statt „383“.

Zu Band 51:

Kaplansky, Irving: Quadratic forms. J. math. Soc. Japan 5, 200—207 (1953); dies. Zbl. 51, 29.

In Zeile 3 v. o. des Referats lies „die Ordnung der Faktorgruppe“ statt „die Faktorgruppe“.

Sierpinski, W.: Sur un théorème concernant l'équivalence des ensembles de points par décomposition finie. Matematiche 8, 4 p. (1953); dies. Zbl. 51, 41.

In der zweiten Zeile des Titels lies „Nr. 1, 10—13“ statt „4 p.“.

Hanani, Haim: On sums of series of complex numbers. Pacific J. Math. 3, 695—709 (1953); dies. Zbl. 51, 45.

In Zeile 1 v. o. des Referats ist hinter „Hanani“ einzufügen „(Chojnacki)“.

Mikols, Mikls: ber die Beziehung zwischen der Gammafunktion und den trigonometrischen Funktionen. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 4, 143—157 und russische Zusammenfassg. 157 (1953); dies. Zbl. 51, 52.

In Zeile 9 v. u. lies „Formel“ statt „Formen“.

In der Formelzeile (2) lies \int_0^1 statt \int_1^0 .

In Zeile 6 v. u. lies „durch B_{2r} “ statt „zu streichen“.

Hinter dem Referentenamen ist statt des Punktes anzufügen „(Würzburg).“

Krejn, M. G.: Ein Analogon der ebyev-Marcovschen Ungleichungen beim eindimensionalen Randwertproblem. Doklady Akad. Nauk SSSR. N. Ser. 89, 5—8 (1953) [Russisch]; dies. Zbl. 51, 69—70.

Auf S. 69 in Zeile 6 v. u. lies $L^2_0(0, l)$ statt $L^2(0, l)$.

Kamynin, L. I.: Über die Anwendbarkeit der Differenzenmethode auf die Lösung der Wärmeleitungsgleichung. I: Die Eindeutigkeit der Lösung eines Systems von Differenzgleichungen. II. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 17, 163—180 und 249—268 (1953) [Russisch]; dies. Zbl. 51, 76.

In Zeile 3 des Titels ist hinter „II“ statt des Punktes „.“ einzufügen „: Die Konvergenz des Differenzverfahrens für die Wärmeleitungsgleichung.“

Salam, Abdus: Fredholm solutions of partial integral equations. Proc. Cambridge Philos. Soc. 49, 213—217 (1953); dies. Zbl. 51, 82.

In Zeile 4 v. o. des Referats lies „ $K_1(x_1, x_2; y_1)$ “ statt „ $K_1(x_1, x_2; y)$ “.

Rao, C. Radhakrishna: Discriminant functions for genetic differentiation and selection. Sankhyā 12, 229—246 (1953); dies. Zbl. 51, 110.

Im Titel lies „differentiation“ statt „differentiation“.

Nijenhuis, Albert: On the holonomy groups of linear connections. Ia, Ib. General properties of affine connections. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. 56, 233—240, 241—249 (1953); dies. Zbl. 51, 132—133.

Auf S. 132 in Zeile 2 v. o. des Referats lies „ $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$ “ statt „ $\Gamma_{\mu\lambda}^k$ “.

Gottschalk, W. H.: Intersection and closure. Proc. Amer. math. Soc. 4, 470—473 (1953); dies. Zbl. 51, 138—139.

Auf S. 138 in Zeile 6 v. u. zwischen „space“ und „are“ füge „ X “ ein.

Kodaira, K. and D. C. Spencer: Divisor class groups on algebraic varieties. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 872—877 (1953); dies. Zbl. 51, 146.

In Zeile 2 v. o. des Referats lies „states simply that“ statt „is stated simply as“.

In Zeile 4 v. u. des Referats lies „ $q > 0$ “ statt „ $q \geq 1$ “.

Temperley, H. N. V.: A new theory of liquid helium. Further treatment. Proc. phys. Soc., Sect. A 66, 995—1008 (1953); dies. Zbl. 51, 227.

In Zeile 7 v. o. des Referats lies „ $<$ “ statt „ \approx “.

Herpin, A.: Les forces de polarisabilité dans les cristaux. J. Phys. Radium 14, 611—620 (1953); dies. Zbl. 51, 231.

Zusatz des Ref.: Bei tiefen Temperaturen wird allerdings die so berechnete Korrektur sogar im Vorzeichen falsch. Man kann daher die Polarisierbarkeit der Gitterionen sicher nicht allein für die Abweichungen von den Cauchy-Relationen verantwortlich machen.

Band, William: Low temperature diamagnetism of electrons in a cylinder. Phys. Review, II. Ser. 91, 249—255 (1953); dies. Zbl. 51, 232—233.

Nachträglicher Zusatz des Ref.: „Verf. zieht in einer Note [Phys. Review, II. Ser. 93, 350 (1954)] das Ergebnis seiner Rechnung zurück. Die Berichtigung führt genau auf die von Dingle gegebenen Werte.“

Rooshbroeck, W. van: The transport of added current carriers in a homogeneous semiconductor. Phys. Review, II. Ser. 91, 282—289 (1953); dies. Zbl. 51, 235.

Der Verfassername lautet „W. van Rooshbroeck“. Eine entsprechende Korrektur ist im Autorenregister, dies. Zbl. 51, 473 Spalte 3 u., anzubringen.

Grün, O.: Beiträge zur Gruppentheorie. V. Über endliche p -Gruppen. Osaka math. J. 5, 117—146 (1953); dies. Zbl. 51, 257—258.

Auf S. 257 in Zeile 12 v. u. lies „ $\mathfrak{D}_{1,p^\mu}(\mathfrak{N})$ “ statt „ $\mathfrak{D}_{i,p^\mu}(\mathfrak{N})$ “.

Auf S. 258 in Zeile 4 v. o. lies „ $(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{v,p^\mu}), \mathfrak{G}(p'', v))$ “ statt „ $(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} \div \mathfrak{U}_{v,p^\mu}), \mathfrak{G}(p^\mu, v))$ “.

Kawada, Yukiyo: On the ramification theory of infinite algebraic extensions. Ann. of Math. II. Ser. 58, 24—47 (1953); dies. Zbl. 51, 269.

In Zeile 15 v. o. des Referats lies „durchläuft“ statt „durchkauft“.

In Zeile 8 v. u. des Referats lies „ $G_{K/k}/G_{K'/k}$ “ statt „ $G_{K/k}/G_{K''/k}$ “.

Achiezer, N. I. und S. N. Bernstejn: Eine Verallgemeinerung eines Satzes über Gewichtsfunktionen und eine Anwendung auf das Momentenproblem. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 1109—1112 (1953) [Russisch]; dies. Zbl. 51, 300—301.

Auf S. 300 in Zeile 4 v. o. des Referats lies „ $\sup_{-\infty < x < +\infty}$ “ statt „ $\sup_{-\alpha < x < x + \alpha}$ “.

Andersson, Bengt J.: A note on the constant of Koebe. Ark. Mat. 2, 415—416 (1953); dies. Zbl. 51, 311—312.

Auf S. 311 lies in der Formelzeile „ $\inf_{w \notin D_w}$ “ statt „ $\inf_{w \in D_w}$ “.

Lévy, Paul: Processus markoviens et stationnaires du cinquième type (infinité dénombrable d'états possibles, paramètre continu). C. r. Acad. Sci., Paris 236, 1630—1632 (1953); dies. Zbl. 51, 357.

In Zeile 8 v. u. lies „instantaneous states“ statt nur „instantaneous“.

Schuh, Fred.: Bewegung einer exzentrisch belasteten Kugel auf einer horizontalen Fläche im Zusammenhang mit dem Zauberkreisel „Tippe top“. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 423—432 (1953) [Holländisch]; dies. Zbl. 51, 408—409.

In den beiden Formelzeilen des Referats (auf S. 409) lies „ $m g k (r - k)^2$ “ bzw. „ $m g k (r + k)^2$ “ statt „ $m g k (r - k)$ “ bzw. „ $m g k (r + k)$ “.

Chandra Das, Sisir: Note on the elastic distortion of a cylindrical hole by tangential fractions on the inner boundary. Quart. appl. Math. 11, 124—127 (1953); dies. Zbl. 51, 413.

Der Verfassersname ist zu lesen „Das, Sisir Chandra“.

Cini, M. and S. Fubini: Adiabatic nuclear potential for large values of the coupling constant. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 1695—1703 (1953); dies. Zbl. 51, 445.

Der Referent heißt „E. Freese“.

Zu Band 52:

Kontorovič, P.: Zur Theorie der Halbgruppen in einer Gruppe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 229—231 (1953) [Russisch]; dies. Zbl. 52, 18.

Überall im Referat lies „ Π “ statt „ π “.

Feit, W.: The degree formula for the skew-representations of the symmetric group. Proc. Amer. math. Soc. 4, 740—744 (1953); dies. Zbl. 52, 23.

In Zeile 3 v. o. des Referats lies „ α_1 “ statt „ α_0 “.

Russo, Salvatore: Sulle trascendenti intere di genere zero. Matematiche 8, 3—9 (1953); dies. Zbl. 52, 77—78.

Die Arbeit erschien in Heft Nr. 1 des Bandes der Zeitschrift.

Rosen, S.: Modular transformation of certain series. Duke math. J. 20, 593—599 (1953); dies. Zbl. 52, 87.

In Zeile 2 v. u. des Referats lies „ $\Gamma_0(2)$ “ statt „ $\Gamma_1(2)$ “.

Pfetzner, Werner: Die Wirkung der Modulsstitutionen auf mehrfache Theta-reihen zu quadratischen Formen ungerader Variablenzahl. Arch. der Math. 4, 448—454 (1953); dies. Zbl. 52, 87.

In Zeile 5 v. u. des Referats lies „ $\Gamma_0(2)$ “ statt „ $\Gamma_1(2)$ “.

In Zeile 4 v. u. lies „Schoeneberg“ statt „Schöneberg“.

Whyburn, W. M.: Note on a non-self-adjoint differential system of the second order. J. Elisha Mitchell sci. Soc. 69, 116—118 (1953); dies. Zbl. 52, 94—95.

Auf S. 95 in Zeile 2 v. o. lies „ $\cos^2 \tau_b$ “ statt „ $\cos^2 v_b$ “.

In Zeile 4 v. o. lies „ θ “ statt „ Θ “.

Alexiewicz, A.: A theorem on the structure of linear operations. Studia math. 13, 1—12 (1953); dies. Zbl. 52, 114—115.

Die Arbeit erschien im Band „14“ der Zeitschrift.

Kato, Tosio: Integration of the equation of evolution in a Banach space. J. math. Soc. Japan 5, 208—234 (1953); dies. Zbl. 52, 126.

Die Formel (2) sollte lauten:

$$U(t, s)x = \text{strong lim}_{\substack{\max |t_j - t_{j-1}| \rightarrow 0 \\ s = t_0 < \dots < t_n = t}} \prod_{k=1}^n \exp((t_k - t_{k-1}) A_{t_{k-1}}) x.$$

Rothe, E. H.: Gradient mappings. Bull. Amer. math. Soc. 54, 5—19 (1953); dies. Zbl. 52, 128.

Die Arbeit erschien in Band 59 der Zeitschrift.

Costa, M. A. Fernandes: Über die Berechnung der Verteilung einer Zufallsvariablen. Inst. Actuários Portug., Bol. 8, 45—57 (1953) [Portugiesisch mit englischer Zusammenfassg.]; dies. Zbl. 52, 139.

Der Verfassername ist zu lesen „Fernandes Costa, M. A.“

Bochner, S.: Closure classes originating in the theory of probability. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 1082—1088 (1953); dies. Zbl. 52, 140.

In Zeile 5 v. u. des Referats lies „P'“ statt „P**“.

Cam, Lucien Le: On some asymptotic properties of maximum likelihood estimates and related Baye's estimates. Univ. California Publ. Statist. 1, 277—330 (1953); dies. Zbl. 52, 154—155.

Der Verfassername ist zu lesen „LeCam, Lucien“.

Costa, M. A. Fernandes: On the graduation of discrete frequency distributions. Inst. Actuários Portug., Bol. 8, 21—27 (1953); dies. Zbl. 52, 155.

Der Verfassername ist zu lesen „Fernandes Costa, M. A.“

Takeno, Hyôitirô: Theory of the spherically symmetric space-times. II. Group of motions. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 16, 67—73 (1953); dies. Zbl. 52, 177.

In der zweiten Titelzeile lies „(1952)“ statt „(1953)“.

Die fehlende Formel (*) lautet:

$$ds^2 = A(r, t) dr^2 - B(r, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + C(r, t) dt^2.$$

Lamson, K. W.: On the curvature tensor of Einstein's generalized theory of gravitation. Canadian J. Math. 5, 297—300 (1953); dies. Zbl. 52, 178.

In Zeile 4 v. u. des Referats lies „ $h_{\beta\alpha\eta}^{\alpha}$ “ statt „ $j_{\beta\alpha\eta}^{\alpha}$ “.

Baiada, E.: Sulla teoria dei punti critici e la topologia delle varietà. Matematiche 8, 27—49 (1953); dies. Zbl. 52, 200.

Die Arbeit erschien in Heft Nr. 1 des Bandes der Zeitschrift.

Chandra Das, Sisir: On the effect of a small spherical cavity in a semi-infinite elastic solid under stresses produced by a couple on the plane boundary. Bull. Calcutta math. Soc. 45, 89—93 (1953); dies. Zbl. 52, 206.

Der Verfassername ist zu lesen „Das, Sisir Chandra“.

Lomadze, G. A.: Über die Summation einer gewissen singulären Reihe. I. Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze 19, 64—77 (1953) [Russisch]; dies. Zbl. 52, 279—280.

Auf S. 280 in Zeile 2 v. o. lies „ungerade quadratfrei“ statt „quadratfrei“.

In Zeile 3 v. o. lies „alle ungeraden“ statt „alle“.

Yano, Shigeki: Cesàro summability of Fourier series. Tôhoku math. J., II. Ser. 5, 196—197 (1953); dies. Zbl. 52, 292—293.

Die Zitate auf S. 292 in den Zeilen 4, 3 v. u. sind durch folgende zu ersetzen: S. Yano, this Zbl. 47, 70; 49, 323.

Lelong, P.: Fonctions plurisousharmoniques; mesures de Radon associées. Applications aux fonctions analytiques. Centre Belge Rech. math., Colloque fonctions plusieurs variables. Bruxelles du 11 au 14 mars 1953, 21—40, (1953); dies. Zbl. 52, 309—310.

Auf S. 309, am Ende der Formel in Zeile 9 v. u. lies „ $dz_k / \lambda dz_k$ “ statt „ $dz_k / \lambda dz_k$ “.

Mizuhata, Sigeru: Sur les phénomènes de sauts dans certains systèmes non inéaires. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 27, 203—221 (1953); dies. Zbl. 52, 345.

Der Verfassername lautet „Sigeru Mizohata“. Eine entsprechende Korrektur ist auch im Autorenregister (S. 472, Spalte 2) anzubringen.

Tatarkiewicz, Krzysztof: Quelques remarques sur la convexité des sphères. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 6, 19—30, polnische und russische Zusammenfassgn. 30 (1953); dies. Zbl. 52, 339.

Der Verfassername lautet „Krzysztof Tatarkiewicz“.

Andersen, Erik Sparre: On sums of symmetrically dependent random variables. Skand. Aktuarietidskr. 53, 123—138 (1953); dies. Zbl. 52, 361.

Der Verfassername ist zu lesen „Sparre Andersen, Erik“. Entsprechende Korrekturen sind im Autorenregister (S. 460, Spalte 2 bzw. S. 477, Spalte 2) anzubringen. Die Bandangabe der Zeitschrift sollte lauten „1953(36)“.

Alexandroff (Aleksandrov), P.: Der topologische Dualitätssatz von Pontrjagin. Moskovsk. gosudarst. Univ., učenyje Zapiski 163, Mat. 6, 3—29 (1952); dies. Zbl. 52, 397.

Im Verfasseramen lies „P. S.“ statt nur „P.“. Eine entsprechende Korrektur ist im Autorenregister (S. 460, Spalte 1) anzubringen.

Iwahori, Nagayoshi: On an orthogonal invariant of two linear spaces. Sci. Papers College general Educ. Univ. Tokyo 3, 115—130 (1953); dies. Zbl. 52, 399.

Im ganzen Referat lies durchweg „ θ “ statt „ Θ “.

Chandra Das, Sisir: On the stresses due to a small spherical inclusion in a uniform beam under constant bending moment. Bull. Calcutta math. Soc. 45, 55—63 (1953); dies. Zbl. 52, 418.

Der Verfassername ist zu lesen „Das, Sisir Chandra“.

Chandra Dasgupta, Sushil: Note on Love waves in a homogeneous crust laid upon heterogeneous medium (II). Indian J. theor. Phys. 1, 121—124 (1953); dies. Zbl. 52, 425.

Der Verfassername ist zu lesen „Dasgupta, Sushil Chandra“. Im Autorenregister ist die Anführungsstelle (S. 463, Spalte 1) mit dem Querverweis (S. 464, Spalte 1) zu vertauschen.

Marx, G.: Das elektromagnetische Feld in bewegten anisotropen Medien. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 3, 75—94 (1953); dies. Zbl. 52, 441—442.

Auf S. 442 in den Zeilen 9 (zweimal) und 11 (einmal) v. o. lies „ z “ statt „ z “.

Papapetrou, A.: Eine rotationssymmetrische Lösung in der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. der Physik, VI. F. 12, 309—315 (1953); dies. Zbl. 52, 443.

In der Formelzeile lies „ $e^{\mu\nu}$ “ statt „ $e^{\mu\nu}$ “.

Bergmann, Otto: Zur Optik in der verallgemeinerten Feldtheorie. Acta phys. Austr. 6, 306—318 (1953); dies. Zbl. 52, 443—444.

Auf S. 443 in Zeile 3 v. u. lies „Hittmair“ statt „Hittmar“.

Auf S. 444 in Zeile 4 v. o. lies ebenfalls „Hittmair“ statt „Hittmar“ sowie „ u “ statt „ n “.

Zu Band 53:

Andersen, Erik Sparre: Two summation formulae for product sums of binomial coefficients. Math. Scandinav. 1, 261—262 (1953); dies. Zbl. 53, 7.

Der Verfassername ist zu lesen „Sparre Andersen, Erik“.

Iséki, Kiyoshi: On 0-dimensional compact ring. Math. Japonicae 3, 37—40 (1953); dies. Zbl. 53, 16.

In Zeile 6 v. o. des Referats lies „Gelbaum“ statt „Galbaum“.

In Zeile 7 v. u. des Referats füge „=“ zwischen „ $\pi_\beta^2(x - N_\beta)$ “ und „ $x + N_\beta$ “ ein.

In Zeile 6 v. u. lies „=“ statt „ $R =$ “.

Krzyż, Jan: On monotony-preserving transformations. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sect. A 6, 91—111, polnische und russische Zusammenfassgn. 111 (1953); dies. Zbl. 53, 36.

Der Verfasser schreibt sich „Jan Krzyż“.

In Zeile 4 v. o. des Referats lies „ D “ statt „ G “.

Zmorovič, V. A.: Über Strukturformeln gewisser Klassen von analytischen Funktionen, die in einem Kreisring schlicht sind. Doklady Akad. Nauk SSSR. n. Ser. 86, 465—468 (1953); dies. Zbl. 53, 48.

Die Zeitschrift erschien 1952.

Bars, Lipman: Partial differential equations and pseudoanalytic functions on Riemann surfaces. Ann. Math. Studies Nr. 30, 157—165 (1953); dies. Zbl. 53, 52.

Der Verfassername lautet „Lipman Bers“.

Andreev, A. F.: Lösung des Problems des Wirbels und des Strudels in einem gewissen Falle. Priklad. Mat. Mech. 17, 333—338 (1953) [Russisch]; dies. Zbl. 53, 62.

Der Referentenname lautet „J. L. Massera“.

Giorgio, Ennio de: Osservazione relative ai teoremi di unicITÀ per le equazioni differenziali a derivate parziali di tipo ellittico, con condizioni al contorno di tipo misto. Ricerche Mat. 2, 183—191 (1953); dies. Zbl. 53, 70.

Die Formelzeile soll lauten:

$$(a) \quad L(u) = \sum_{i,k}^{1,r} a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j=1}^r b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x) u = f(x).$$

In Zeile 5 v. o. des Referats lies „ dx_r “ statt „ dx_n “.

In Zeile 3/2 v. u. des Referats lies „ $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$ “ statt „ $B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_n \subset m \dots$ “.

Soysal, Selma: Sur certain ensembles ordonnés de projecteurs dans l'espace de Hilbert. I. II. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul. Sér. A 18, 305—312, 323—351 (1953); dies. Zbl. 53, 80—81.

Auf S. 80 in Zeile 1 v. o. des Referats lies „précédée“ statt „précedée“.

In Zeile 6 v. o. lies „ \int “ statt „ \int_g “.

Mourier, Édith: Éléments aléatoires dans un espace de Banach. Ann. Inst. Henri Poincaré 13, 161—244 (1953); dies. Zbl. 53, 95—96.

Der Verfassername lautet „Édith Mourier“.

Andersen, Erik Sparre: On the fluctuations of sums of random variables. Math. Scandinav. 1, 263—285 (1953); dies. Zbl. 53, 97.

Der Verfassername ist zu lesen „Sparre Andersen, Erik“.

Katsurada, Yoshie: On the parallel displacement of subspaces in an affinely connected space. Tensor. n. Ser. 3, 1—12 (1953); dies. Zbl. 53, 118.

In der ersten Formelzeile ist hinter dem letzten Index „ γ “ die Klammer zu schließen.

Baum, Walter: Die Nullweggruppe und ihre Verallgemeinerungen. Compositio math. 11, 83—118 (1953); dies. Zbl. 53, 127—128.

Auf S. 127 in Zeile 9 v. u. lies „auf K^n “ statt „auf K_n “.

Blakers, A. L. and W. S. Massey: Products in homotopy theory. Ann. of Math., II. Ser. 58, 295—324 (1953); dies. Zbl. 53, 128—129.

Auf S. 128 in Zeile 4 v. o. des Referats lies „ f_* “ statt „ f^* “.

Chandra Das, Sisir: On the elastic distortion of a cylindrical hole by localized axial shears on the inner boundary. Indian J. theor. Phys. 1, 41—46 (1953); dies. Zbl. 53, 139.

Der Verfassername ist zu lesen „Das, Sisir Chandra“.

Organesjan, L. A.: Die Gleichung für die Verteilung der transversalen Geschwindigkeiten und der Koeffizient der turbulenten Mischung bei der Bewegung einer Flüssigkeit an einer Biegung. Akad. Nauk Armjan. SSR. Izvestija. fiz.-mat. estest. teehn. Nauki 6, Nr. 1, 55—66 u. armen. Zusammenfassg. 66 (1953) [Russisch]; dies. Zbl. 53, 145.

Der Verfassername lautet „L. A. Oganjesjan“.

Fel'd, Ja. N.: Die Induktion von Strömen durch bewegte Ladungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 447—450 (1953) [Russisch]; dies. Zbl. 53, 155—156.

Der Referentenname lautet „F. V. Atkinson“.

Eriksson, H. A. S.: Space reflection, time reversal and charge conjugation of spinor fields. Ark. Fys. 5, 349—358 (1953); dies. Zbl. 53, 164.

Die Arbeit befindet sich in Band „6“ der Zeitschrift.

Unsöld, Albrecht (vorgelegt von): Ein bisher unbekannter Brief von C. F. Gauß an H. C. Schumacher. Abh. Braunschweig. wiss. Ges. 5, 203—204 (1963); dies. Zbl. 53, 197.

Das Heft der Zeitschrift erschien „1953“.

Kulikov, L. Ja.: Verallgemeinerte primäre Gruppen. I. II. Trudy Moskovsk. mat. Obsč. 1, 247—326 (1952). 2, 85—167 (1953) [Russisch]; dies. Zbl. 53, 210—211. Auf S. 210 in der dritten Zeile über der Formelzeile füge „A“ hinter „Gruppe“ ein. In der Formelzeile lies „ A_1 “ statt „A“.

Archidiacono, Giuseppe: Sulla estensione delle operazioni aritmetiche. Collect. Mat. Barcelóna 6, 91—105 (1953); dies. Zbl. 53, 213.

Der Verfassername lautet „Giuseppe Arcidiacono“.

Eyraud, Henri: Les récurrences et le problème du transfini. Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A 16, 5—24 (1953); dies. Zbl. 53, 223.

In Zeile 15 v. o. des Referats sind die Zeichen „ \mathcal{C} “ und „ \mathcal{C} “ zu vertauschen.

Eyraud, Henri: Les noyaux de divergence. Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A 16, 25—36 (1953); dies. Zbl. 53, 229.

In Zeile 7 v. u. des Referats lies „Konvergenzkern von d .“ statt „Konvergenzkern, von dem“.

Cattabianchi, Luigi Tanzi: Sui teoremi di Mercer e Vijayaraghavan precisati per le successioni oscillanti. Rivista Mat. Univ. Parma 4, 337—361 (1953); dies. Zbl. 53, 231.

Der Verfassername ist zu lesen „Tanzi Cattabianchi, Luigi“.

Ozaki, Shigeo, Isao Ono and Mitsuru Ozawa: On the function-theoretic identities. I. II. Sci. Reports Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A 4, 157—160, 161—168 (1951); dies. Zbl. 53, 239.

In Zeile 7 v. o. des Referats lies „ \int_F “ statt „ \int_S “.

Ono, Isao: On some properties of mean multivalent functions. Sci. Reports Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A 4, 169—175 (1951); dies. Zbl. 53, 240.

In Zeile 3 v. o. des Referats lies „ $f[\Gamma_z]$ “ statt „ Γ_z “.

Bauer, W. F.: Modified Sturm-Liouville systems. Quart. appl. Math. 11, 273—282 (1953); dies. Zbl. 53, 246.

In Zeile 5 v. o. des Referats ist hinter „:“ einzufügen „Er betrachtet die gewöhnliche Sturm-Liouvillesche Gleichung als Laplacesche Transformierte einer partiellen Differentialgleichung vom Wärmeleitungstyp.“ Statt „durch“ lies „Durch“.

In Zeile 2 v. u. des Referats ist hinter „ $t \rightarrow 0$ “ einzufügen „(mit t als Zeitparameter der zugehörigen Wärmeleitungsgleichung)“.

Krejn, M. G.: Über einige Fälle der effektiven Bestimmung der Dichte einer inhomogenen Saite aus ihrer Spektralfunktion. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 617—620 (1953) [Russisch]; dies. Zbl. 53, 246—247.

Der Referentenname lautet „G. Borg“.

Ferrer, Lorenzo: Über die Entwicklung gewisser erzeugender Funktionen in Polynomreihen und ihre Zusammenhänge mit der Theorie des Präpotentials. Collect. Math. Barcelona 6, 221—291 (1953) [Spanisch]; dies. Zbl. 53, 254.

In der ersten Formelzeile lies „ $\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}$ “ statt „ $\partial^{i_1} x_1 \dots \partial^{i_n} x_n$ “.

Yoshihiro, Takashi: Some theorems of Fourier integral. J. Math. 1, 87—93 (1953); dies. Zbl. 53, 255.

In Zeile 3 v. o. des Referats lies „ $\lim_{x \rightarrow 0}$ “ statt „ $\lim_{x \rightarrow \infty}$ “.

Wegner, Udo: Contributi alla teoria dei procedimenti iterativi per la risoluzione numerica dei sistemi di equazioni lineari algebriche. Atti Accad. naz. Lincei. Mem. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 4, 48 S. (1953); dies. Zbl. 53, 261—262.

Auf S. 262 in Zeile 5 v. o. lies „ $(g_1 E_1 - A_1)$ “ statt „ $(g_1 E - A)$ “.

Clippinger, R. F., B. Dimsdale and J. H. Levin: Automatic digital computers in industrial research. II. Fortschr. Phys. 1, 91—110 (1953); dies. Zbl. 53, 265.

Der Name der Zeitschrift lautet „J. Soc. industr. appl. Math.“.

Cox, D. R. and Walter L. Smith: A direct proof of a fundamental theorem of renewal theory. Skand. Aktuarietidskr. 53, 139—150 (1953); dies. Zbl. 53, 268.

Die Angabe für den Band der Zeitschrift sollte lauten „1953 (36)“.

Reuter, G. E. H. and W. Ledermann: On the differential equations for the transition probabilities of Markov processes with enumerably many states. Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 247—262 (1953); dies. Zbl. 53, 272.

Hinter Zeile 4 v. o. des Referats ist einzufügen „denote with $F^{(n)}(s, t)$ the solution of the equations“.

Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren Mitteilungen, so wird hinter dem Stichwort die Mitteilungsnummer mit römischen Ziffern angegeben.

- Abascal, E Vidal s. Vidal Abascal, E. 188.
- Abelès, Florin (Résistance électrique) 185.
- Abellanas, Pedro (Ausgezeichnete Untermannigfaltigkeiten) 289; (Primals of an algebraic variety) 289.
- Abelson, Robert P. (Neyman-Johnson technique) 412.
- Abramov, A. A. (Formel für Pontrjaginsche Tensorfelder) 118; (Tafeln für $\ln F(z)$) 266.
- Achiezer, A. und A. Sitenko (Anregung des Endovibrators durch bewegtes geladenes Teilchen) 470.
- Actes Colloque International des Vibrations non linéaires) 133.
- Adem, José (Steenrod squares) 434.
- Agababjan, E. Ch. (Spannungen in einer Röhre) 139; (Elastischer Zylinder) 139; (Dynamische Erweiterung eines Zylinders) 310.
- Agnew, R. P. (Differential equations) 58.
- Agostini, Amedeo (Lettere di Leibniz e di G. Grandi) 338.
- Al'ber, S. I. (Homologien des Raumes) 130.
- Albrecht, F. (Espace des ensembles fermés) 432.
- Aleksandrijskij, B. I. (Integral-Differentialsysteme) 77.
- Aleksandrjan, E. A. und N. O. Gulkanjan (Torsion von Stäben) 137.
- Alexandroff (Aleksandrov), P. (Kombinatorische Topologie nicht-abgeschlossener Mengen) 126.
- Aljančić, Slobodan (A -summierbare lineare Funktionale) 398.
- Allais, M. (Équilibre économique) 282; (Théorie positive des choix comportant un risque) 282; (Observations générales) 282; (Choix comportant un risque) 282.
- Allen jr., S. G. (Structural estimation) 281.
- Allendoerfer, C. B. and C. O. Oakley (Principles of mathematics) 194.
- Almeida Costa, A. (Theorie der Ringe) 215.
- Alphen, W. J. van s. F. J. Plantema 307.
- Alumjaë, N. A. (Gleichgewichtszustand einer Schale) 138.
- Amanov, T. I. (Resultat von S. M. Nikol'skij) 73.
- Ambarcumjan, S. A. (Schalen von doppelter Krümmung) 307; (Stabilität dünnwandiger Stäbe) 440; (Geschichtete, anisotrope Schalen) 440.
- Amemiya, Ichirô (Spectral theory in semi-ordered linear spaces) 258.
- Amerio, Luigi (Théorie de Poincaré) 62.
- Ananjan, A. K. (Zirkulation beim Umbiegen einer turbulenten Strömung) 142; (Turbulente Strömung) 458.
- Andrade Guimarães, Antônio (Eine Aufgabe aus der Vektorrechnung) 205; (Lineare Gleichungen über einem Vektorraum) 205.
- Andreev, A. F. (Problem des Wirbels und Strudels) 62.
- Andreian, C. (Transformations intérieures) 377.
- Andreoli, G. (Leggi evolutive di collettività) 417.
- Giulio (Funzioni simmetriche) 352.
- Angelitch, Tatomir und Zagorka Šnajder (Sätze aus der Dreiecksgeometrie) 419.
- Angoff, William H. (Test reliability) 276.
- Anisimova, V. B. (Komprimierte Elemente zylindrischer Schalen) 308.
- Antonowicz, K. (Schrödinger equation) 169.
- Aoyama, Hirojirô (Test in paired comparisons) 275.
- Araki, Shôrô (Triad excision theorems) 129.
- Archidiacono, Giuseppe (Operazioni aritmetiche) 213.
- Aręskin, G. Ja. (Distributive Verbände) 215.
- Arghiriade, Em. (Quadriques osculatrices) 428; (Polarité par rapport aux quadriques osculatrices) 429.
- Arneodo, Carlo (Risoluzione numerica di equazioni differenziali) 90.
- Aronszajn, N. and A. N. Milgram (Differential operators) 65.
- Arrow, Kenneth J. (Valeurs boursières) 418.
- Artzy, Rafael (Ebene Viergebebe) 107.
- Aruffo, Giulio (Differenziale generalizzato delle forme continue) 65.
- Arzanych, I. S. (Satz vom Hamilton-Jacobischen Typus) 436.
- Asano, Keizo and Kentaro Murata (Arithmetical ideal theory in semigroups) 349.
- Atoji, Masao, Tokunosuké Watanabé and William N. Lipscomb (X-ray scattering from a hindered rotator. II.) 332.
- Aumann, Robert J. s. George W. Whitehead 434.
- Avazašvili, D. Z. (Beugungsaufgabe für elektromagnetische Schwingungen) 322.
- Babakova, O. I. (Trigonometrisch konjugierte Reihen) 41.
- Bachrach, L. D. (Integralgleichung einer linearen Antenne) 254.
- Badaljan, G. V. (Taylorsche Reihe) 228.
- Baer, Reinhold (Hypercenter of a group) 207; (Hyperzentrum einer Gruppe. II—IV.) 207.
- Baeva, N. V. (Faktorisierbare Gruppen) 11.
- Bagchi, S. N. s. R. Hosemann 180, 332.
- Bagemihl, F., P. Erdős et W. Seidel (Fonctions holomorphes) 238.
- and W. Seidel (Baire category) 45.
- , Frederick (One-to-one correspondences) 30.

- Bajcsay, Pál (Functions of several variables) 366; (Integration of functions) 366.
- Bajraktarević, M. (Les suites définies par $x_n = \varepsilon_0 f(\varepsilon_1 f(\dots(\varepsilon_n f(0))\dots))$) 370.
- Mahmud (Théorème de la moyenne) 367.
- Baker, W. G. (Electric currents in ionosphere. I. II.) 335.
- Balasubramanian, N. (Sets of points) 419.
- Banaschewski, Bernhard (Satz von Zorn) 224.
- Barbălat, I. (Solutions bornées et solutions périodiques pour équations différentielles non linéaires) 385.
- Barbilian D. (Arithmétiques à théorie des idéaux) 216.
- Barenblatt, G. I. (Schwebende Teilchen in turbulenter Strömung) 153; (Stationäre Filtration eines Gases) 461.
- Barratt, M. G. and P. J. Hilton (Join operators) 434.
- Barsotti, I. (Abelian varieties) 114.
- Bartels, Hans (Erzwungene Übergänge) 179.
- Barthel, Woldemar (Parallelverschiebung in lokal-Minkowskischen Räumen. I, II.) 118.
- Bartkowska, J. (Aberrations) 162.
- Bartlett, M. S. (Confidence intervals. II.) 104; (Recurrence) 273.
- Barton, D. E. (Neyman's smooth test of goodness of fit) 102; (Sum of squares) 274.
- Bassompierre, André (Résonance nucléaire quadrupolaire) 330.
- Basu, D. (Criterion of consistency) 275.
- Batchelor, G. K. (Homogeneous turbulence) 144.
- Bates, D. R., R. T. S. Darling, S. C. Howe and A. L. Stewart (Hydrogen molecular ion. III.) 329.
- — —, U. Öpik and G. Poots (Hydrogen molecular ion. II.) 329.
- — — and G. Poots (Hydrogen molecular ion. I.) 329.
- Bauer, W. F. (Sturm-Liouville systems) 246.
- Baum, John D. (Transformation groups) 351.
- Walter (Nullweggruppe) 127.
- Bazilevič, I. E. und G. V. Koričikij (Schlichte konforme Abbildungen) 376.
- Bazylev, V. T. (Quasi-Laplace'sche Transformationen) 296.
- Beauregard, Olivier Costa de s. Costa de Beauregard, Olivier 474.
- Beckerley, James G. (edited by) (Nuclear Science. II.) 327; (III.) 476.
- Behmann, Heinrich (Typenfreie Logik und Modalität) 343.
- Behrbohm, Hermann (Upwash-cancellation in supersonic wing theory. I, II.) 148; (Disturbance velocity potential. I, II.) 148.
- Belgrano Bremard, J. C. (Formeln von Euler-Maclaurin) 368.
- Belinskij, P. P. (Verzerrung bei quasikonformen Abbildungen) 50.
- Beljakova, V. K. (Freie Oberfläche des Grundwassers) 460.
- Bellman, Richard (Stability theory of differential equations) 247; (Bottleneck problems) 279.
- — s. T. E. Harris 414.
- Beloch, Margherita Piazzolla s. Piazzolla Beloch, Margherita 304.
- Belostockij, A. Ja. (Algebraische Gleichungen) 260.
- Belozarov, S. E. (Rostover Universität) 340.
- Benado, Mihail (Notion de structure) 351.
- Bereis, R. (Zykloidenraster) 303.
- Berekašvili, V. A. (Borelsche Summation von Doppelreihen) 37.
- Berezanskij, Ju. M. (Schrödinger-Gleichung aus Spektralfunktion) 69.
- Bergman, Stefan (Linear partial differential equations) 67.
- — and M. Schiffer (Kernel functions) 390.
- Bergmann, Howard G. (Boundary layer problem for differential equations) 386.
- Peter G. (Relativity) 163.
- Bergström, Harald (Stabile Verteilungsfunktionen) 267.
- Berman, S. D. (Für die Isomorphie ganzzahlige Gruppenringe) 211.
- Bernays, Paul (Polygoninhalte an Stelle eines Spiegelungsaxioms) 419.
- Bers, Lipman (Partial differential equations) 52; (Difference equations of elliptic type) 402.
- Bertolini, Fernando (Traiettorie luminose in spazio trasparente) 75.
- Besicovitch, A. S. (Rearrangement of series) 34.
- Beth, E. W. (Modèles d'un système formel) 2; (Padoa's method) 344.
- Betz, A. (herausgegeben von) (Hydro- und Aerodynamik) 142.
- Beyer, Hermann (Mikroskopische Abbildung) 468.
- Bhatnagar, K. P. (Self-reciprocal functions) 78; (General transform) 399; (Self-reciprocal functions) 399.
- Bianchi, L. (Opere. Vol. I, parte I, II; Vol. II.) 337.
- Bicadze, A. V. (Analogon des Integrals vom Cauchyschen Typus) 72, 392.
- Bieberbach, Ludwig (Gewöhnliche Differentialgleichungen) 381.
- Bilimovitch, Anton (Apollonius theorem) 189.
- Bilo, J. (Tétraèdres pseudo-parallèles) 111.
- Bilý, Josef (E. Bunickij) 340.
- Birindelli, Carlo (Teorema di Meyer) 64.
- Birkhoff, G., D. M. Young and E. H. Zarantonello (Conformal mapping) 264.
- Birman, M. Š. (Allgemeine Randwertaufgaben) 70.
- Bjutner, É. K. s. M. V. Vol'kenstein 482.
- Blakers, A. L. and W. S. Massey (Products in homotopy theory) 128; (Homotopy groups. III.) 129.
- Blambert, Maurice (Théorèmes de E. Landau) 44; (Singularités des séries de Dirichlet) 237.
- Blanc-Lapierre, A. (Transmission de l'information) 405.
- Blanuša, Danilo (Einbettung des n -dimensionalen hyperbolischen Raumes) 109.
- Blavette, Élie de (Science musicale) 317.
- Bloch, A. Š. (Bestimmung einer Differentialgleichung) 387.

- Bochner, S. (Complex spaces) 116; (Stochastic processes) 271.
 — — and W. T. Martin (Complex spaces) 53.
 Bodaszkowski, Stanislaw (Asym-metric state of stress) 440.
 Bodiou, Georges (Formalisme statistique quantique) 153.
 Bogdan, Gabriela (Tensions dans un fluide visqueux) 314.
 Böhm, Corrado (Equazione differenziale non lineare) 245.
 Bohm, D. (Remarks by Einstein) 325; (Formulation of quantum mechanics) 324.
 — — and David Pines (Electron interactions. III.) 182.
 Boiteux, M. (Couts et tarifs) 283.
 Bojanić, Ranko (Équations différentielles linéaires) 74.
 — — und Vladeta Vučković (Eigenfunktionen der schwin-genden Platte) 448.
 Bolder, Harm. (Flow functions) 49.
 Bompiani, Enrico (Spazi a curvatura costante) 286; (Geo-metria iperspaziale) 287; (Geometrie non-euclidea) 419.
 Bondar, N. G. (Schwingungen und Stabilität von Stabsystemen) 311.
 Bonferroni, Carlo (Proprietà delle funzioni) 225; (Proprietà di un insieme variabile) 225.
 Bononcini, Vittorio E. (Continuità per integrali su superficie chiuse) 31.
 Boolsky, R. (Optique géométrique axiomatique) 468.
 Boomstra, W. (Triangles) 419.
 Borel, Armand (Bouts des espaces homogènes) 130.
 — — Emile (Nombres premiers) 360.
 Borg, Göran (Stabilité) 63.
 Borgnis, F. E. (Acoustic radiation pressure) 318.
 Borodin, V. A. und Ju. F. Dit-jakin (Strömungen einer zähen Flüssigkeit) 456.
 Borsuk, K. (Theorem on anti-podes) 298; (Decomposition of a compactum) 299.
 — — and J. W. Jaworowski (Labil and stabil points) 300.
 Bortone, Guido (Metodi di som-mazione di Gronwall) 369.
 Borůvka, O. (Intégrales oscilla-toires des équations diffé-rentielles) 58.
 Bose, S. N. (Théorie du champ unitaire) 167; (Existence du tenseur g) 167.
 Bott, Raoul (Steenrod squares) 301.
 Boulanger, J. (Certaines équations aux dérivées partielles) 74.
 Bouligand, G. (Principes des mathématiques) 1.
 Boys, S. F. (Electronic wave functions. X.) 328.
 Bragard, Lucien (Déviation de la verticale) 192.
 Brauer, Alfred (Characteristic roots of matrices) 8; (Distribu-tion of Jacobian symbols) 358; (Hadamard determi-nants) 358.
 Braun, I. (Momentum equations of Reiner liquid) 146.
 Bray, Hubert E. (Convergence of Fourier series) 232.
 Brdička, M. (Lorentz transfor-mation of Dirac's equation) 475.
 — — Miroslav (Compatibility and stress functions) 305.
 Bredichin, B. M. (Charaktere von Halbgruppen) 362; (Funktionen der Charaktere von Halbgruppen) 363.
 Brejtman, V. M. (Integralähn-lichkeit) 435.
 Bremard, J. C. Belgrano s. Bel-grano
 Bremard, J. C. 368.
 Brennekamp, H. (Théorie de Sturm-Liouville) 386.
 Brickstock, A. and J. A. Pople (Correlation of electrons. III, IV.) 478.
 Brock, John E. (Variation of coefficients of linear equations) 263.
 — — Paul (Vibration equation) 245.
 Brodskij, A. s. D. Ivanenko 473.
 Broglie, Louis de (Théorème de M. Poincelot) 133; (Interprétation de la mécanique ondu-latoire) 324; (Physique quan-tique) 324.
 Bronfenbrenner, Jean (Least-squares bias) 281.
 Bronzoni, Liliana T. de (Seg-nale luminoso in un mezzo anisotropo) 164.
 Brown, R. G. s. G. J. Thaler 265.
 Bruijn, N. G. de (Difference-differential equation. I, II.) 387.
 — — — — and P. Erdős (Re-cursion formula and Tau-berian theorems) 369.
 Bruin, F. (High resolution in-terferometers. I, II.) 161.
 Brun, Viggo (Formula of Simp-son) 264.
 Brunk, H. D. (Initial value pro-blem) 263.
 Bruno, Rita (Trasformazione cremoniana dell' S_8) 292.
 Brusotti, Luigi („Elementa“ di C. E. Filippa) 197; (Equa-zioni a derivate parziali to-talmente iperboliche) 426.
 Bugaenko, G. A. (Vertikale Wärmekonvektion in Zy-lindern) 315.
 Bukovics, E. (Topologische In-variante) 292.
 Bunt, L. N. H. (Parallelen-axiom) 108.
 Burau, Werner (Grundman-nigfaltigkeiten der projektiven Geometrie) 420.
 Burgers, J. M. (Plane shock waves) 149; (Detonation and deflagration problems) 150.
 — — — and M. Mitchner (Ho-mogeneous non-isotropic tur-bulence. I, II.) 144.
 Burgess, C. E. (Sum of inde-composable continua) 125.
 Burington, Richard Stevens and Donald Curtis May jr. (Handbook of probability and statistics) 101.
 Burros, Raymond H. and W. A. Gibson (Law of compara-tive judgment) 284.
 Busemann, Adolf (Transonic potential flow) 148.
 — — Herbert (Metriken auf dem Torus) 430; (Metrics on the torus) 430.
 Cabannes, H. (Ondes de choc) 149.
 Caccioppoli, Renato (Funzioni pseudo-analitiche) 242.
 Cadwell, J. H. (Quasi-ranges in samples) 106.
 Cafiero, Federico (Formula di Green) 32; (Olomorfia di una funzione) 43.
 Cahen, Gilbert (Perturbation. II.) 465.
 Caianiello, E. R. (Strong-focu-sing accelerator) 163; (Quan-tum field theory. I.) 171.
 — — — and A. Turrin (Strong-focusing accelerator) 163.
 Calabi, E. (Metric Riemann sur-faces) 51.
 Caldirola, P. (Moto dell'elett-rone) 156.
 Callen, Herbert B. s. E. L. Of-fenbacher 184.

- Calleja, Pedro Pi s. Pi Calleja, Pedro 226.
- Cămpan, Florica T. (I. Ionescu) 340.
- Campedelli, Luigi (Geometria. Vol. II. p. II.) 288.
- Cap, Ferdinand (Kopplung eines Dirac-Feldes mit Bosonen vom Spin 1) 475.
- Capuano, Pasquale (Atmosfera come lente convergente) 484; (Rifrazione atmosferica) 484.
- Carafoli, E. et B. Horovitz (Écoulement supersonique autour d'une aile) 459.
- Čarin, V. S. (Automorphismengruppen) 11.
- Carlitz, L. (Equations in a finite field) 25; (Basic identities) 25; (Partition formulae) 26; (Partition identities) 26; (Partitions in $GF[q, x]$) 219; (Class number) 219; (Dedekind sums) 359.
- Čarný, I. A. (Integralbeziehung) 462.
- Carrier, G. F. and K. T. Yen (High-speed flows) 149.
- Carroll, John B. (Approximating simple structure in factor analysis) 276.
- Cartan, Henri (Variétés analytiques complexes) 53.
- Carter, W. C. and A. S. Rettig (Analytic minimization methods) 2.
- Casesnoves, Dario Maravall s. Maravall Casesnoves, Dario 189.
- Cassina, Ugo (Idéographie de Peano) 1.
- Castoldi, Luigi (Operatori di stato) 325; (Struttura formale della relatività) 473.
- Cattabianchi, Luigi Tanzi s. Tanzi Cattabianchi, Luigi 231.
- Čech, E. 340.
- (Miroslav Katetov) 340.
- Centre Belge de Recherches mathématiques (Fonctions de plusieurs variables) 242.
- Čerepanov, V. I. s. A. I. Rezanov 187.
- Černíkov, S. N. (Ergänzbare Untergruppen) 11.
- Chakrabarty, N. K. and G. K. Sarkar (K -function of Bate-man) 237.
- Chakravarty, N. K. (Theorems in operational calculus) 255.
- Chamberlin, Eliot and James Wolfe (Critical points of polynomials) 9.
- Chandrasekhar, S. (Statistical theory of turbulence) 145; (Fluid heated below) 191; (Problems of stability) 191.
- Chapanis, A. (Fitting parabolic equations to experimental data) 277.
- Chara, I. S. (Konforme Abbildung polygonaler Bereiche) 241; (Spannungen in unendlichen Platten) 308; (Spannungen in einer schweren Halbebene) 308.
- Čharšiladze, F. I. (Funktionen von V. A. Steklov) 40.
- Charzyński, Zygmunt (Fonctions univalentes bornées) 47.
- Chaskind, M. D. (Beugung der Wellen an einem Schiff) 150.
- — — s. M. I. Gurevič 316.
- Chatiašvili, G. M. (Deformation eines Balkens) 305.
- Chattarji, P. P. (Deformation in the interior of the earth) 139.
- Chaudhury, A. M. (Upper-air circulation over Indo-Pakistan) 336.
- Chavinson, S. Ja. (Extremaleigenschaften von Funktionen) 49.
- Chazy, J. (Mécanique céleste) 188.
- Chen, Yu Why (Flows through nozzles) 146.
- Sin-I (Laminar boundary layer flow) 144.
- Cheo, L. (Sets of Gaussian integers) 220.
- Chern, Shiing-Shen (Pseudogroups) 16; (Some formulas in the theory of surfaces) 299.
- Chernoff, Herman (Locally optimal designs) 105.
- — and N. Divinsky (Maximum-likelihood estimates) 281.
- — and H. Rubin (Limited-information estimates) 281.
- Cherubino, Salvatore (Matrici infinite) 8.
- Chrétien, M. and R. E. Peierls (Form factors) 173.
- Chuang, Feng-Kan (Decay of turbulence) 457.
- Chung, Kai Lai (Markov chains) 272.
- Church, Alonzo (Non-normal truth-tables) 341.
- Churchhouse, R. F. (Irrationality) 362.
- Ciliberto, Carlo (Equazione non lineare di tipo parabolico) 251.
- Cini, M. (Relativistic two-body problem) 172.
- Cirillo, Elda (Rappresentazioni complesse dell' S_2 tripotenziale) 292.
- Clauser, Emilio (Equazioni einsteiniane) 167.
- Clement, Preston R. (Chebyshev approximation method) 232.
- Clippinger, R. F., B. Dimsdale and J. H. Levin (Automatic digital computers in industrial research. I, II.) 265.
- Cochran, W. s. H. Lipson 180.
- Cohen, E. Richard (Least squares) 415.
- Hirsh G. (Synchronisation sous-harmonique) 156.
- Collatz, L. (Oscillations non linéaires) 90.
- Colloque de Topologie de Strasbourg 1952. 303.
- Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique XL. (Econométrie) 281.
- Colombo, Giuseppe (Problema di stabilità) 246.
- Serge (Bande-passante) 465.
- Combes, Jean (Fonctions analytiques) 43.
- Conforto, Fabio (Funzioni abeliane singolari) 114.
- Conti, Roberto (Problema di Darboux) 389.
- Conway, Arthur William (Papers) 132.
- H. D. (Plates of variable thickness) 137.
- Cooke, Richard G. (Linear operators) 399.
- Copeland sr., Arthur H. and Frank Harary (Boolean algebra) 16.
- Cornish, F. H. J. and J. L. Olsen (Thermal conductivity of superconductors) 188.
- Corson, D. R. and A. O. Hanson (Extranuclear interactions of electrons and gamma rays) 327.
- E. M. (Tensors, spinors and wave equations) 325.
- Costa, A. Almeida s. Almeida Costa, A. 215.
- Costa de Beauregard, Olivier (Interprétation bohrienne des phénomènes quantiques) 474.
- Courant, R. and D. Hilbert (Mathematical physics. I.) 28.
- Coury, Andrée s. Max von Laue 338.
- Ch. s. Max von Laue 338.

- Coutoumanos, A. (Rectilinear congruences) 295.
- Cox, D. R. and Walter L. Smith (Theorem of renewal theory) 268.
- Coxeter, H. S. M. (Golden section) 7.
- Craig, William (Axiomatizability within a system) 201.
- Cribier, D. (Oscillations d'agitation thermique des atomes dans un cristal) 331.
- Croisot, R. (Demi-groupes) 9.
- Cronheim, Arno (Hessenberg's theorem) 107.
- Čudov, L. A. (Lineare partielle Differentialgleichungen) 250.
- Cugiani, Marco (Valori di un polinomio liberi da potenze) 26; (Intervalli fra i valori dell'argomento) 26.
- Cukkerman, I. I. (Fokussierung in Senderöhren) 470.
- Culver, R. (Network analogue for the rectangular beam stability equation) 265.
- Curry, Haskell B. (Systèmes formels) 1.
- Curzio, Mario (Particolare isomorfismo di struttura) 9; (Minimo ordine dei reticoli modulari di lunghezza 3) 17.
- Cyrlin, L. É. (Bipolare Korona) 479.
- Daboni, Luciano** (Probabilità di eventi equivalenti) 98; (Condizione di equivalenza per una classe di eventi) 98.
- Dahl, N. C. (Toroidal-shell expansion joints) 139.
- Dahmen, Gert (Riccatische Differentialgleichung) 383.
- Daleckij, Ju. L. (Vektorielle Differentialgleichung) 259.
- Dantzig, D. van (Utilité d'une distribution de probabilités) 283.
- Dänzer, H. und W. Müller (Orgelspiel) 318.
- Darbo, Gabriele (Nozione di variazione limitata) 226; (Approssimazione dell'integrale di Lebesgue) 226.
- Dargent, E. (Modèles macroéconomiques de séquences) 279.
- Darling, D. A. (Random division of interval) 99.
- — — and A. J. F. Siegert (First passage problem) 273.
- R. T. S. s. D. R. Bates 329.
- Darwin, J. H. (Population differences) 416.
- Das, Sisir Chandra (Elastic distortion of a cylindrical hole) 139.
- Dauvillier, Alexandre (Origine des éléments chimiques) 189.
- David, F. N. and N. L. Johnson (Reciprocal Bernoulli and Poisson variables) 409.
- Davidenko, D. F. (Nichtlineare Gleichungen) 89.
- Davidoff, Melvin D. (Table of tetrachoric correlation coefficient) 277.
- — — and Howard W. Goheen (Tetrachoric correlation coefficient) 276.
- Davies, E. T. (Transformations de contact) 117.
- Davis, Philip (Simple quadratures) 232.
- R. C. (Fourier expansion of random processes) 406.
- Davydov, A. S. (Absorption des Lichts durch Lösungen) 478.
- Dedekind, Richard s. Bernhard Riemann 194.
- Dehlinger, U. und H. Schenk (Gitterstrukturen) 183.
- Delange, Hubert (Intégrales de Laplace) 396.
- Delerue, P. (Calcul symbolique à n variables. II.) 372.
- Demeure, Marcel (Le champ d'une particule et champ électromagnétique homogène) 476.
- Demerville, Paul s. Louis Renou 338.
- Denis-Papin, M. et A. Kaufmann (Calcul tensoriel appliqué) 426.
- Denjoy, Arnaud (Séries analytiques) 38.
- Depman, I. Ja. (G. Vega und Ja. F. Kulik) 339; (V. A. Steklov) 340.
- Derwidué, L. (Singularités d'une variété algébrique) 113.
- de-Shalit, A. and M. Goldhaber (Mixed configurations in nuclei) 174.
- Detlovs, V. K. (Normale Algorithmen und rekursive Funktionen) 345.
- Devidé, Vladimir (Modell der euklidischen Geometrie) 108.
- Di Noi, Salvatore s. Noi, Salvatore di 109.
- Dias, C. Silva s. Silva Dias, C. 303.
- Dieudonné, J. A. (Locally convex vector spaces) 257.
- Dijksterhuis, E. J. (Ch. Huygens) 197.
- Dikij, L. A. (Formel von Gel'fand-Levitan) 60.
- Dimaggio, F. s. M. G. Salvadori 140.
- Dimentberg, F. M. (Welle mit ungleichen Hauptträgheitsmomenten des Querschnitts) 141; (Einfluß der Schubdeformationen auf Transversalschwingungen einer Welle) 141.
- Dimsdale, B. s. R. F. Clippinger 265.
- Dinculeanu, Nicolae (Limites généralisées) 432.
- Dinghas, Alexandre (Intégrales de Dirichlet) 253.
- Dirac, G. A. (k -chromatic graphs) 131.
- P. A. M. (Lorentz transformation) 164.
- Ditjakin, Ju. F. s. V. A. Borodin 457.
- Divinsky, Nathan s. Herman Chernoff 281.
- Djačenko, V. E. und N. A. Tancjura (Elektromodell-darstellung von Gleichungen elliptischen Typs) 265.
- Djatlovickij, L. I. (Ebenes Problem der Elastizitätstheorie) 309.
- Djerosimović, Božidar (Intervall de l'erreur) 28.
- Đugač, M. I. (Gemischte Probleme der Elastizitätstheorie) 309.
- Dmitriev, A. A. (Wellen auf einer zähen Flüssigkeit) 462.
- Dobrescu, Andrei (Groupes de Lie) 14; (Tenseurs associés à un groupe G_r) 212; (Groupes de Lie à trois paramètres) 350.
- Donald, D. W. A. (Compound interest) 417.
- Donovan, B. s. N. H. March 186.
- Doob, J. L. (Stochastic processes) 268.
- Döring, W. und V. Zehler (Elektronenbänder im Diamantgitter) 183.
- Doss, Shafik and Saad K. Nasr (Functional equation) 61.
- Doucet, Yves (Entropie de fusion) 151.
- Douglas, Jesse (Finite Abelian groups. IV.) 13.
- Downton, F. (Least-squares estimation) 106.
- Drăganu, Mircea (Problème bi-harmonique fondamental pour le cercle) 253.
- Dragoni, Giuseppe Scorza s. Scorza Dragoni, Giuseppe 33.
- Draminsky, Per (Vibrations de torsion de vilebrequins) 134.
- DuBois, Philip H. s. Jane Loevinger 276.

- Duncan, W. J. (Physical similarity) 435.
- Dungey, J. W. (Motion of magnetic fields) 162.
- Duparc, H. J. A. (Mersenne numbers) 23; (Recurring sequences) 23; (Carmichael numbers) 24.
- Durand, David s. E. J. Gumbel 95.
- Durand, Émile (Électrostatique et magnétostatique) 154.
- Dutta, M. (Thermodynamic problem) 151.
- Dvoretzky, A., J. Kiefer and J. Wolfowitz (Optimal character of (s, S) policy) 279.
- Dwass, Meyer (Rank order statistics) 103.
- Dwyer, Paul S. (Errors of matrix computations) 88.
- Dyke, Milton D. van (Supersonic flow past an oscillating wedge) 317.
- Dynkin, E. B. (Zufällige Größen) 98.
- Dyson, F. J. (Wave function) 172.
- Džrbašjan, M. M. (Ableitungen von Polynomen) 40; (Integraldarstellung) 376.
- Džvaršejšvili, A. G. (Satz von Fubini) 33; (Satz von N. N. Luzin) 227.
- Eckart, Carl (Time averages and ensemble averages) 152.
- Eckersley, T. L. (Ionosphere) 192.
- Eckmann, Beno (Structures complexes) 119.
- Eder, Gernot (Statistik virtueller Mesonen) 173.
- Edrei, Albert (Conjecture of Schoenberg) 237.
- Edwards, S. F. (Quantum electrodynamics) 171.
- Efimov, M. I. (Čaplyginsche Gleichungen) 437.
- Efremovič, V. A. (Nachbarschaftsgeometrie) 115.
- Egger, Hans (Querschwingungen von Trägern) 436.
- Ehresmann, Charles (Structure infinitésimales) 120; (Variété différentiable) 130.
- Ehrlich, Gertrude (Continuous rings) 352.
- Einstein, A. (Grundlagen der Quanten-Mechanik) 325.
- Ekstein, M. G. s. W. Parrish 331.
- Ellis, David (Boolean functions) 215.
- Epstein, Saul T. (Quantum mechanics) 325.
- Eraslan, Necdet (Résultante des forces d'inertie) 437.
- Erdős, P. and E. G. Straus (Sequences in Banach space) 80.
- s. F. Bagemihl 238.
- s. N. G. de Bruijn 369.
- Eriksson, H. A. S. (Space reflection) 164.
- Errera, Alfred (Problème du continu) 223.
- Ertel, Hans (Turbulenz-Tensor) 316.
- Erugin, N. P. (Methoden A. M. Ljapunovs) 58.
- Escande, Léopold et Roger Huron (Oscillations dans deux chambres d'équilibre) 461.
- Est, W. T. van und Hans Freudenthal (Vollständige Regularität und Normalität) 124.
- Estrin, M. I. (Homogene Aufgabe für eine Schale) 442.
- Euranto, E. K. s. K. V. Laurikainen 178.
- Evans II, George W. (Picone theorem) 390.
- Evgrafov, M. A. (Systeme analytischer Funktionen) 374; (Ganze Funktion mit vorgegebenen Werten) 374.
- Eyraud, Henri (Récurrences et le problème du transfini) 223; (Noyaux de divergence) 229.
- Faddeev, D. K. (Einfache Algebren) 356.
- Fadell, Edward R. (Singular homology theory) 127.
- Fadini, Angelo (Campi finiti di Galois) 218; (Trasformazione cremoniana dell' S_6) 292.
- Fano, Gino (Surfaces du quatrième ordre) 115.
- U. (X- and gamma rays) 480.
- Fanslau, G. und O. Lucke (Erdmagnetisches Kernfeld) 484.
- Farah, E. (Bon ordre de l'ensemble) 224.
- Fazekas, Ferenc (Indefinite integrals) 366.
- Feigl, Georg (Höhere Mathematik) 194.
- Fejér, J. A. (Diffraction of waves) 160.
- Fel'd, Ja. N. (Induktion von Strömen) 155.
- Fel'dman, Ja. S. (p -wertige Funktionen) 240.
- Fenchel, W. (Convex cones, sets and functions) 122.
- Ferber, Robert (Aggregate consumption functions) 278.
- Ferguson, A. E. (Parameters of a network) 465.
- Ferrar, Leonard William (Algebra) 7.
- Ferrari, Carlo (Écoulement de fluides compressibles) 317.
- Ferrer, Lorenzo (Entwicklung erzeugender Funktionen in Polynomreihen) 254.
- Few, L. (Double packing of spheres) 122.
- Feynman, R. P. (λ transition in helium) 480.
- Feys, Robert (Peano et Burali) 1; (Reduction of all modalities to 42 in S_3) 343.
- Fichera, Gaetano (Eigenvalues and eigenfunctions) 91; (Problema bi-iperarmonico) 253.
- Fieber, H. (Temperaturverteilung in einem Strom durchflossenen Draht) 154.
- Fiedler, Miroslav (Matrizen und Parametergleichung der Singularitäten einer rationalen Kurve) 425.
- Fil'čakov, P. F. (Hydromechanische Berechnung eines Dammes) 319; (Christoffel-Schwarzsche Konstante) 319.
- s. A. M. Senkov 319.
- Filimon, I. (Mouvement subsonique à circulation des fluides) 315.
- Filliozat, Jean s. Louis Renou 338.
- Finetti, Bruno de (Legge riguardante l'estinzione) 278; (Théorie des jeux) 282.
- Finikov, S. P. (Moderne Differentialgeometrie) 429.
- Finn, Robert (Isolated singularities) 392.
- Finzi, Bruno (Aerodinamica) 315; (Equazioni di campo) 473.
- Fisz, M. (Sums of r -point random variables) 97.
- Fite, Wade L. (Maximization of return from limited resources) 395.
- Fjellstedt, Lars (Diophantine equations) 24.
- Flanders, Harley (Sylvester-Franke theorem) 204.
- Fleddermann, G. s. H. Prüfer 287.
- Flora, F. s. Galileo Galilei 194.
- Flores, Enrique Valle s. Valle Flores, Enrique 212, 431.
- Floyd, E. E. (Orbit spaces. I.) 301.

- Floyd, E. E. and M. K. Fort jr. (Monotone mappings) 126.
- Focke, Joachim (Öffnungs- und Asymmetriefehler) 469.
- Focken, C. M. (Dimensional methods) 435.
- Föllinger, Otto (Lösungen mit Spitzen in Variationsrechnung) 394.
- Fort, E. C. du and S. P. Frankel (Parabolic differential equations) 264.
- jr., M. K. (Cylindrical curve) 121.
- — — s. E. E. Floyd 126.
- Fortet, R. et E. Mourier (Répartition) 96.
- Robert (Applications de la statistique à la physique nucléaire) 477.
- Fortini, Teresa (Piccoli pianeti) 189.
- Fourès-Bruhat, Yvonne (Problème de Cauchy) 251.
- Fraïssé, Roland (Extension aux relations) 29.
- Franchini, Lucia (Sistema di equazioni differenziali ordinarie) 383.
- Franciosi, Vincenzo (Asta sottili pressoinflesse) 310.
- Francis, A. J. (Design of frameworks) 309.
- Norman C. and Kenneth M. Watson (Interactions of π mesons) 177.
- Frank, Ludvik (M. Lerch) 340.
- Frankel, S. P. s. E. C. du Fort 264.
- Franz, Walter (Durchschlag fester Isolatoren) 334.
- Fraser, D. A. S. (Behrens-Fisher problem) 412.
- Frazer, R. A. (Problems in aerodynamics) 150.
- Freire, Rémy (Paramètres des fonctions d'Engel) 412.
- Frenkian, Aram (Études de mathématiques somméroakkadiennes) 195.
- Freudenthal, Hans (Oktavengeometrie) 15; (Machines pensantes) 345.
- — s. W. T. van Est 124.
- Freytag Löringhoff, Bruno Baron v. (Bedeutung der Mathematik für Philosophie) 1.
- Friedmann, Milton (Théorie de l'incertitude) 283.
- Friedrichs, K. O. (Quantum theory of fields) 326.
- Frisancho Pineda, Ignacio (Dimensionstheorie der Zahlen) 213.
- Frisch, Ragnar (Occurrence test) 283.
- Froda, Alexandru (Ensembles des distances) 259.
- Fröhlich, H. and R. L. Platzman (Energy loss of moving electrons) 181.
- Fubini, S. (Nucleon-pion scattering) 173.
- Fujita, Chohko s. Tsuneto Shimose 475.
- Fujiwara, Izuru (Operator function $\log(e^{\nu e^z})$) 169.
- Fullerton, R. E. (Subdivision of surfaces) 31.
- Fulton, Curtis M. (Catena and tractrix) 109.
- Funk, Paul (Geometrien vom Krümmungsmaß Null) 297.
- Fürst, Dario (Satz von Weyl) 227.
- Fürstenberg, Harry (Indeterminate form) 35.
- Furuya, Shigeru (Boundary value problem) 59.
- G.-Mikusiński, J. s. Mikusiński J. G.- 389.
- G.-Rodeja, F., E. s. Rodeja F., E. G.- 24.
- Gachov, F. D. (Inverse Randwertprobleme) 239.
- Gagua, M. E. (Besselsche Funktion erster Art) 92.
- Galburá, G. (Genre d'une courbe algébrique) 376.
- Galilei, Galileo (Opere) 194.
- Galimov, K. Z. (Schalen bei beliebigen Verrückungen) 442.
- Gallarati, Dionisio (Superficie dell'ottavo ordine) 290; (Nota del B. Segre) 290.
- Ganea, Tudor (Groupes topologiques sans centre) 211; (Catégorie uni-dimensionnelle) 433.
- García, Godofredo (Zeitgenössische Physik) 473; (Relativistische Gleichungen) 473.
- Tranque, Tomás (Kubische Graphen) 131.
- Gårding, Lars (Dirichlet's problem) 391; (Eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators) 391.
- Garnier, René (Communication précédente) 164.
- Garnir, H. G. (Onde émise par une source ponctuelle. I, II.) 68.
- Gauthier, Luc (Cycles limites) 135.
- Gavrila, M. (Formules de Liénard-Wiechert) 465.
- Gavrilov, Ju. M. (Konvergenz einfacher Iterationen) 205.
- Gejdel'man, R. M. (Zweiparametrische Geradenfamilien) 296.
- Gelfand, I. M. und M. I. Graev (Reguläre Darstellung einer Lieschen Gruppe) 15; (Analogon der Plancherelschen Formel) 15.
- — — und B. M. Levitan (Eigenwerte eines Differentialoperators) 60.
- Georgiev, G. (Formules de quadrature mécanique) 264.
- Gerjuoy, Edward (Total reflection of waves) 322.
- Geronimus, Ja. L. (Tangentielle Ableitung) 73; (Krylow: Näherungsrechnungen) 310.
- Geršuni, G. Z. (Ebene konvektive Flüssigkeitsbewegung) 457.
- Gheorghită, Șt. (Mouvement stationnaire d'un fluide visqueux) 455; (Oscillateur avec la masse variable) 471.
- Ghermănescu, M. (Équations fonctionnelles) 260, 401, 402.
- Ghika, Al. (Ensembles A -convexes dans des A -modules) 353; (Modules topologiques localement convexes) 353; (Convexité dans certains modules) 353; (Modules topologiques A -localement convexes) 353.
- Ghizzetti, Aldo (Conduites d'eau avec cheminées d'équilibre) 460.
- Gianuzzi, Maria (Problema al contorno) 59.
- Gibson, W. A. (Law of comparative judgment) 284.
- — — s. Raymond H. Burros 284.
- Gilbarg, David (Subsonic flows) 315.
- Gillies, A. W. (Synchronisation des oscillateurs) 156.
- Gilmore, P. C. (Griss' criticism of intuitionistic logic) 6; (Effect of Griss' criticism on deductive theories. I, II.) 341.
- Gilvarry, J. J. (Linear approximations in vector differential equations) 247.
- Ginzburg (Ginsburg), V. (W.) L. (Elektrische Schwankungserscheinungen) 463; (Théorie der Supraleitung) 482.
- Giorgi, Ennio de (Teoremi di unicità per le equazioni differenziali a derivate parziali) 70; (Estremo inferiore di un funzionale) 394.

- Giovanardi, Mario (Prospettiva di una sfera) 304.
- Girshick, M. A. and Trygve Haavelmo (Demand for food) 280.
- Giuliano, Landolino (Concetto di funzione generalmente a variazione limitata) 367.
- Glansdorff, P. (Expression générale des bilans) 151.
- Glauber, A. E. und I. R. Juchnovskij („Superpositionen“-Approximation) 476.
- Gleser, Goldine C. s. Jane Loevinger 276.
- Glöwatzki, Ernst (Jacobische Funktion) 266.
- Goffman, C. (Real functions) 225.
- Goheen, Howard W. s. Melvin D. Davidoff 276.
- Goldhaber, M. s. A de-Shalit 174.
- Goldstein, Herbert (Bohr formula) 169.
- S. (Exchange processes in fixed columns. I. II.) 461.
- Golubëv, V. A. Verallgemeinerung von $(\varphi(n))$ und $\pi(x)$ 361.
- Gomes, A. Pereira s. Pereira Gomes, A. 454.
- Gonseth, Ferdinand (La géométrie et le problème de l'espace. I—VI.) 344.
- Goodell, John D. (Computing machinery) 92; (Decision element systems) 92.
- Goormaghtigh, R. (Théorème de Droz-Farny) 110.
- Gordon, A. N. and E. H. Sondheimer (Surface impedance) 91.
- I. I. (Überdeckungen von Sphären) 300.
- Gorgidze, A. Ja. (Biegung eines prismatischen Balkens) 306.
- Gorn, Saul (Series expansions of rays in isotropic media) 323.
- Gorowara, K. K. (Generators of a ruled surface) 293.
- Gottschalk, W. H. (Quaternality) 341.
- Graev, M. I. s. I. M. Gel'fand 15.
- Graffi, Dario (Période d'oscillation) 64; (Sistemi non lineari a due gradi di libertà) 133; (Materiali elastico-viscosi) 310.
- Grammel, R. (Oscillations non linéaires) 133; (Nichtlinare Schwingungen) 312.
- Gray, C. A. M. (Effects of concentrated loads) 308.
- Marion C. (Legendre functions) 236.
- Greco, Donato (Gruppi finiti) 12; (Criteri di compattezza) 366.
- Green, H. S. (Quantum electrodynamics) 171.
- — — and E. Wolf (Electromagnetic fields) 154.
- Greene, Thom R. and Albert E. Heins (Water waves over a channel) 150.
- Greenwood, J. Arthur s. E. J. Gumbel 95.
- Grenander, Ulf and Murray Rosenblatt (Spectral analysis of time series) 410; (Statistical spectral analysis) 411.
- Grinberg, G. A. (Ebene Aufgabe der Elastizitätstheorie) 138; (Statistische achsensymmetrische elektrische und magnetische Felder) 470.
- S. I. (Eigenwerte des Laplaceschen Operators) 394.
- Grodko, L. N. (Biegungsschwingungen eines Stabes) 311.
- Groenewold, H. J. (Spinor rotations. I, II.) 164.
- Groot, S. R. de (Hydrodynamics and thermodynamics) 151.
- Gross, B. (Thermodielektrischer Effekt) 155; (Relaxationsspektren. I, II.) 448.
- Großberg, J. I. s. W. I. Lewin 250.
- Grümm, Hans (Dioptrik des Elektronen- und Ionenbündels) 163.
- Grüß, G. (Differential- und Integralrechnung) 225.
- Gubarov, A. I. (Trockengleichrichter und Kontakte der Halbleiter. II.) 481.
- Guilbaud, G. (Théorie du risque) 418.
- Guillot, M. R. (Courbes associées à un quadrilatère. I, II.) 111.
- Guimarães, António Andrade s. Andrade Guimarães, António 205.
- Gulkanjan, N. O. (Torsion von Prismen) 309.
- — — s. E. A. Aleksandrjan 137.
- Gullstrand, Tore R. (Transonic flow past aerofoils) 149.
- Gumbel, Émile J. (Débits minima) 103.
- — — J. Arthur Greenwood and David Durand (Distribution: theory and tables) 95.
- Günther, Wilhelm (Gleichung der Plattenbiegung) 306.
- Gupta, H. C. (Original of $p^{-\lambda}_{\alpha+1} F_{\alpha}(-p^{\alpha})$) 236.
- Hansraj (Non-concyclic sets of points) 419.
- Gufev, N. F. (Spannungsverteilung in einer Platte) 307.
- Gurevič, M. I. und M. D. Chas-kind (Strömung eines Strahles um eine Kontur) 316.
- Gürsey, Feza (Gravitation and cosmic expansion) 168.
- Gussov, V. V. (Zylinderfunktionen) 339.
- Guttman, Louis (Structure of quantitative variates) 277; (Reliability formulas) 413.
- Gvozdozer, S. D. und N. M. Pomerancev (Signale bei magnetischer Resonanz) 178.
- Haag, Jules (Oscillations en chronométrie) 313.
- Haantjes, J. (Kinematische Be- weise) 112.
- Haavelmo, Trygve (Marginal propensity to consume) 280.
- — s. M. S. Girshik 280.
- Hadwiger, H. (Polyederfunktionale. I.) 112; (Additive Funk-tionale. II.) 299; (Gitter und Polyeder) 420.
- Hagstroem, K.-G. (G. Ene- ström) 197.
- Haimovici, Adolf (Réseaux dans un espace à trois di- mensions) 429.
- Halanay, A. (Solutions péri- odiques pour l'équation des oscillations non linéaires for- cées) 385; (Équation de Ric- cati) 385.
- s. A. Şaichin 384.
- Hall, Cecil E. (Electron micro- scopy) 323.
- Ham, Frank S. (Magnetic prop- erties of an electron gas) 186.
- Hamaker, H. C. (Efficiency of sequential sampling for attributes. I, II.) 275.
- Hamilton, J. (Fredholm theory of S-matrix) 475.
- Hammer, Preston C. and An- drew Sobczyk (Planar line families. II.) 123.
- Hammersley, J. M. (Markovian walks) 409; (Capture-recap- ture analysis) 416.
- Hamstrom, Mary-Elizabeth (Webs in the plane) 126; (Certain types of webs) 126.
- Hanson, A. O. s. D. R. Corson 327.

- Hanus, W. and J. Rayski (Vacuum polarization) 174.
- Hara, Osamu and Hisaichiro Okonogi (Gauge invariance in electrodynamics) 170.
- Harada, Shigeharu (Green function) 386.
- Harray, Frank and George E. Uhlenbeck (Number of Husimi trees. I.) 131.
- — s. A. H. Copeland sr. 16.
- Harris, T. E., R. Bellman and H. N. Shapiro (Functional equations) 414.
- Harrold jr., O. G. and E. E. Moise (Almost locally polyhedral spheres) 126.
- Härtig, Klaus (Klassische Syllogistik) 197.
- Hartman, Philip and Aurel Wintner (Singularities in nets of curves) 293.
- S. et C. Ryll-Nardzewski (Théorèmes abstraits de Kronecker) 57.
- Hashizume, Yoko and Fujitsugu Hosokawa (Exactness theorem) 127.
- Haug, Odd (Superior mirage) 192.
- Hauptmann, H. and J. Karle (Magnitude of a structure factor. II.) 333.
- — s. J. Karle 333.
- Hausner, Melvin (Dirichlet's principle) 391.
- Hawe, S. C. s. D. R. Bates 329.
- Hayasi, Takesi und Shôzô Okada (Angeregte Zustände eines atomaren Elektrons) 480.
- — und Takasi Sagawa (Elektronenzustand an einem Kristalldefekt) 480.
- Hayes, Wallace D. (Damped pendulum) 245.
- Hayman, W. K. (Nevanlinna's second theorem) 45; (Fonctions univalentes) 47.
- Hearmon, R. F. (Elastic coefficients) 331.
- Heber, G. (Neue Ursache von Ferromagnetismus) 187.
- Heer, W. J. C. de (Näherungsformeln für versicherungsmathematische Größen) 278.
- Heins, Albert E. (Gravity waves) 462.
- — — s. Th. R. Greene 150.
- Heinz, Erhard (Equation de surface minimum) 294.
- Heisenberg, W. (Nuclear physics) 476.
- Henkin, Leon (Substitution for functional variables) 200.
- Henley, E. M., M. A. Ruderman and J. Steinberger (Reactions of π -mesons with nucleons) 327.
- Henry, L. (Mesures de la fécondité naturelle) 277.
- Herstein, I. N. (Methods and techniques in economics) 279.
- Herzog, E. R. (Sphärisch-trigonometrische Hauptsätze) 288.
- Hesselberg, Th. (Atmospheric eddy movements) 192.
- Hewitt, Edwin (Functionals on almost periodic functions) 82.
- Heyting, A. (Espace de Hilbert) 7.
- Hida, Takeyuki (Poisson process) 98.
- Higgs, P. W. (Electron distribution in crystals. I.) 334.
- Higman, D. G. (Focal series) 12.
- Hilbert, D. s. R. Courant 28.
- Hildebrand, F. B. (Factoring polynomials) 260.
- Hildersheimer, Arnold (Welt der ungewohnten Dimensionen) 197.
- Hille, Einar (Équations de Kolmogoroff) 272.
- Hilton, P. J. s. M. G. Barratt 434.
- Hines, C. O. (Magneto-hydrodynamic formulae) 191.
- Hirakawa, Junkô (Relative minimal surface) 297.
- Hiroike, Kazuo (Second virial coefficient) 152.
- Hirvonen, R. A. (Nutshell tables of mathematical functions) 93.
- Hochschild, G. and J.-P. Serre (Cohomology of Lie algebras) 14.
- Hoffman, A., M. Mannos, D. Sokolowsky and N. Wiegmann (Linear programs) 418.
- Oscar and George Sachs (Plasticity) 310.
- Hofmann, Josef E. (F. Viète) 338.
- Hofstätter, Peter R. (Quantitative Methoden der Psychologie) 283.
- Hoheisel, Guido (Partielle Differentialgleichungen) 250.
- Holecek, K. (Maschinenrechnen) 404.
- Holzer, Ludwig (Fundamentalsatz der additiven Zahlentheorie) 219.
- Hong, Insik s. Yûsaku Komatsu 392.
- Hood, Wm. C. and Tjalling C. Koopmans (edited by) (Econometric method) 279.
- Hood, Wm. C. s. Tjalling C. Koopmans 280.
- Hooker, P. F. and L. H. Longley-Cook (Life and other contingencies. I.) 417.
- Hopf, E. and E. W. Titt (Φ -equation) 457.
- H. (Topologie und Metrik) 420.
- Hopkins, H. G. (Plastic instability of plates) 310.
- — H. (Optical images) 160.
- Hori, Shoichi (Inverse power expansion of $S_{\text{vac}}[\eta^*, \eta, J]$) 172.
- Horie, Chûji (Second sound in superfluid He^3 - He^4 mixtures) 480.
- Hisashi (Spin-spin interactions) 175.
- Hornich, Hans (Lineare partielle Differentialgleichungen) 67.
- Horovitz, B. s. E. Carafoli 459.
- Hosemann, R. und S. N. Bagchi (Electron-density distribution) 180; (Kristallstrukturanalyse. II.) 332; (Q_0 -Funktion) 332.
- Hosokawa, Fujitsugu s. Y. Hashizume 127.
- Hsu, L. C. and J. R. Ravetz (Exponential integrals) 255.
- Hu, Hai-Chang (Torsion of prisms) 137.
- Hua, Loo-Keng (Chua, Lo-Ken) (Tarry's problem) 220; (Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher) 378; (Komplexe Funktionen mehrerer Veränderlicher) 379.
- — and Chen-Hsian Wan (Isomorphisms of linear groups) 212.
- Huber, Alfred (Theorem of Phragmén-Lindelöf type) 392.
- Huff, Charles W. (Pairs of matrices) 8.
- Hull, T. E., C. A. Swanson and D. A. Trumpler (Bessel expansions) 371.
- Hunaerts, J. (Spectre d'émission de OH dans les comètes) 189.
- Hunziker, Gustav (Parallelen-theorie) 108.
- Huppert, Bertram (Monomiale Darstellung) 12.
- Hurley, A. C. (Chemical valency. XIII, XV.) 478.
- — — and Sir John Lennard-Jones (Chemical valency. XII, XIV.) 478.

- Huron, Roger (Continuité d'un opérateur intégral) 367.
 — — s. Léopold Escande 461.
 Hyllén-Cavallius, Carl und Lennart Sandgren (Ebene Geometrie) 419.
- J**acob, Caius (Écoulements lents des fluides visqueux) 314; (Écoulements subsoniques des fluides compressibles) 459.
 Iacovache, M. (Tensions dans un liquide visqueux incompressible) 456.
 Jleiff, Ljubomir (Schlichte Funktionen) 241.
 Jliev, Ljubomir (Analytisch nicht fortsetzbare Reihen) 374; (Symmetrische schlichte Funktionen) 376.
 Inada, Ken-iti (Decision problem) 414.
 Inagaki, Takeshi (Topologie. II.) 302.
 Infeld, L. (Entwicklung der klassischen Elektrodynamik) 464.
 Inglis, D. R. (Light nuclei) 327.
 Inui, Teturo s. Y. Toyozawa 183.
 Ionescu, D. V. (Formules de cubature) 403.
 — — — et L. Németi (Équation aux dérivées partielles qui intervient dans le problème du calcul des tensions thermiques) 439.
 — Dan Gh. (Hydrodynamique des fluides visqueux) 314.
 — Tulcea, C. T. (Intégrale dans les espaces ordonnés) 258.
 Irons, Eric J. (Generalizations in geometrical optics) 162.
 Irwin, B. W. s. W. Parrish 331.
 Iseki, Kanetsiroo (Divisor problem in algebraic number fields) 354.
 Iséki, Kiyoshi (0-dimensional compact ring) 16.
 Ishiguro, Eiichi (Tables of molecular integrals. IV.) 478.
 Ishihara, Shigeru and Morio Obata (Manifolds which admit affine connection) 298.
 Işlinskij, A. Ju. (Integro-Differentialbeziehung) 136.
 Ispas, C. I. (Identités de type Ricci) 430.
 Issmann, S. (Méthode de décision) 1.
 Itô, Hiroshi (Autocorrelation function) 406; (Stationary random process) 407.
 Itô, Kiyosi (Stochastic differential equations. II.) 273.
 — Noboru (Finite groups. I.) 12.
 Ivanenko, D. und A. Brodskij (Wechselwirkung der Gravitation mit dem Teilchen-Vakuum) 473.
 Iwasawa, Kenkichi (Rings of valuation vectors) 356.
 Iwiński, Tadeusz (Application of Laplace transformation to static problems) 443.
 Izumi, Shin-ichi (Trigonometrical series. III.) 234; (Fourier analysis. XLIV.) 234; (XL.) 370.
 — — and Noboru Matsuyama (Trigonometrical series. I.) 234.
- J**aburek, F. (Festigkeit von Laufrädern) 443.
 Jacobson, N. (Abstract algebra. II.) 212.
 Jaffard, Paul (Anneaux du type de Dedekind. II.) 18.
 Jaglom, A. M. (Brownsche Bewegung) 320.
 — — — und I. M. Jaglom (Formeln für die Zahl π) 38.
 — I. M. s. A. M. Jaglom 38.
 Jain, Mahendra Kumar (Derivatives of integral functions) 238.
 Jamieson, A. M. (Bernoulli numbers) 231.
 Jancel, Raymond et Théo Kahan (Gaz faiblement ionisés) 479.
 Janković, Zlatko (Sums S_{2k}) 39.
 Janoš, L. (Zassenhaus refinement) 351.
 Järnefelt, Gustaf (K. F. Sundman) 197.
 Jarzyna, H. et M. Łunc (Dynamique des aérosols) 461.
 Jaworowski, J. W. s. K. Borsuk 300.
 Jaynes, E. T. (Ferroelectricity) 185.
 Jeffreys, Harold (Linear differential equations) 383.
 Jenckel, Ernst (Modelle für plastisch-elastisches Verhalten) 448.
 Jenkins, James A. (Conformal invariants) 49; (Remark on "conformal mapping") 49.
 Jensch, Maria s. W. I. Lewin 250.
 Jha, P. (Locus of the centre of spherical curvature) 292.
 Johansson, Ingebrigt (Concept de „le“ dans calcul affirmatif) 341.
- John, F. (Partial differential equations) 68; (Potential flows) 452.
 Johnson, N. L. s. F. N. David 409.
 — V. A. and K. Lark-Horovitz (Thermoelectric power in semiconductors) 184.
 Jonas, Hans (Integral der Telegraphengleichung) 294.
 Jónsson, Bjarni (Representation of lattices) 213.
 Jossa, Franco (Teoria statica dei solidi) 309.
 Jost, Res and Walter Kohn (Phase shift energy levels and potential) 177.
 Juchnovskij, I. R. s. A. E. Glauberman 476.
 Juhos, Béla v. (Die neue Logik) 1.
 Juncosa, M. L. and D. M. Young (Convergence of solutions of a difference equation to a solution of the diffusion equation) 463.
 Jurek, B. (Aplanatic systems) 322.
 Jušenko, A. A. s. M. E. Temčenko 313.
 Juškevič, A. P. s. B. A. Rozenfel'd 195.
- K**aczkowski, Zbigniew (Anisotropic plate problems) 443; (Functions of deflection) 443.
 Kaganov, M. I. s. I. M. Lifšic 483.
 Kahan, Théo s. Raymond Jancel 479.
 Kähler, Erich (Algebra und Differentialgleichung) 20.
 Kakar, A. G. (Matrix equation $\exp(X+Y) = \exp X \exp Y$) 8.
 Kakutani, Shizuo (Random walk) 51.
 Kalandija, A. I. (Gleichgewicht einer Platte) 307.
 Kalitzin, Nikola St. (Gleichungen der Elektrodynamik) 474; (Elektromagnetismus und Gravitation) 474.
 Kalkanis, Johannes (Lebensversicherungen) 278.
 Kallianpur, G. and H. Robbins (Brownian motion process) 100.
 Kaloujnine, Leo (Gruppe und ihre Automorphismen) 10.
 Kamefuchi, Susumu and Hiroomi Umezawa (Interaction of the elementary particles. IV.) 327.
 Kampen, N. G. van (S -matrix and causality condition I, II.) 170.

- Kamynin, L. I. (Unendliches System gewöhnlicher Differentialgleichungen) 61.
- Kanazawa, Hideo (Interaction of electrons with lattice vibrations) 182; (Interaction of phonon field with electrons) 182.
- Kanellos, S. G. ("Comparative frequency") 95; (Satz des N. Kritikos) 231.
- Kano, Seigo (Filter problem) 410.
- Kanold, Hans-Joachim (Teilerfremde befreundete Zahlen) 24.
- Kanters, P. J. A. (Problème de renouvellement) 278.
- Kao, Richard C. W. (Miller's "Finite Markov processes") 416.
- Kaplan, Wilfred (Functions of a complex variable) 373.
- Kaplansky, Irving (Dual modules. I.) 353.
- Kappler, E. (herausgegeben von) (Flüssigkeiten und Gase) 178.
- Kapštal', V. N. s. M. A. Kovner 478.
- Kapuno, Isaac (Proposition de Bing) 433; (Continus linéaires) 433.
- Karle, J. and H. Hauptmann (Magnitude of a structure factor. I.) 333.
- — s. H. Hauptmann 333.
- Kármán, Theodore von and Gregorio Millán (Constant pressure deflagration) 150.
- — — s. Richard von Mises 436.
- Karpilovskaja, É. B. (Interpolationsmethode) 89.
- Kašanin, R. (Intégrales des fonctions différentiables) 32.
- Kasuga, T. (Partial differential equation) 67.
- Katětov, M. (Correction to "functions in topological spaces") 123.
- Katsurada, Yoshie (Parallel displacement of subspaces) 118; (Intrinsic derivative in non-holonomic exsurface) 298.
- Katterbach, K. (Wellenfunktionen) 328.
- Katz, Leo (Status index) 276.
- — and James H. Powell (Sociometric measurement) 276.
- Kaufmann, A. s. M. Denis-Papin 426.
- Keister, William, Alistair E. Ritchie and Seth H. Washburn (Design of switching circuits) 403.
- Keldyš, L. V. (Monotone Abbildungen des Würfels) 433.
- Keller, Joseph B. (Parallel reflection of light) 322.
- Kellogg, O. D. (Potential theory) 73.
- Kemp, Peter H. (Irreversible electrochemical phenomena) 151.
- Kendall, David G. (Growth of bacterial colonies) 416.
- M. G. and R. M. Sundrum (Distribution-free methods) 103.
- Kerawala, Sulaiman (Symmetrical incomplete block designs) 204.
- Kerstan, Johannes (Ideal- und Modultheorie) 17.
- Keune, Friedrich und Klaus Oswatitsch (Körper kleiner Spannweite in Unter- und Überschallströmung) 143.
- Khan, Ferdouse (Simplified biserial r for item validation) 277.
- Kiefer, J. s. A. Dvoretzky 279.
- Kihara, Tako (Electrical discharges in gases. B.) 180.
- Kikuchi, Sadaemon (Schürer's transformation) 189.
- Kil'čevskij, N. A. (Spannungs-, Geschwindigkeits- und Dichtefunktionen) 305.
- Kim, E. I. (Wärmeausbreitung in unendlichem Körper) 320.
- Kimura, Toshiei (Photon self-energy problem) 171.
- Kinney, J. R. (Sample functions) 271.
- Kinohara, Akira (Derivations and relative differentials) 218.
- Kinoshita, Shin'ichi (Contractible continua) 125; (Theorems on the sphere) 300.
- Kirk von Novgorod (Berechnung der Jahre) 196.
- Kirsch, A. (Pferchkugel eines Punkthaufens) 431.
- Kishimoto, Tadashi s. K. Takayanagi 179.
- Kitagaki, Toshio (Solid focusing field) 163.
- Kitagawa, T. and M. Mitome (Design of factorial experiments) 273.
- Teisuke Kitahara, Yukio Nomachi und Nobuo Watanabe (Sample size) 105.
- Kitahara, Teisuke s. T. Kitagawa 105.
- Kitkin, P. A. (Wirkung des Windes auf Dicke des Wassers) 336.
- Kitz, N. and B. Marchington (Fourier synthesis using Hollerith tabulator) 265.
- Klee jr., V. L. (Theorem of Sz.-Nagy) 122.
- Klepikov, N. P. s. A. A. Sokolov 465.
- Kline, M. (Mathematics in western culture) 193.
- Kloot, N. H. s. E. J. Williams 415.
- Knudsen, H. Lottrup s. Lottrup Knudsen, H. 321.
- Koch, Karl (Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen) 244.
- Kočina, N. N. (Auseinanderfließen des Grundwassers) 460.
- Kodaira, K. (Theory of analytic stacks) 117.
- — and D. C. Spencer (Theorem of Lefschetz) 117.
- Kunihiko (Theorem of Riemann-Roch) 115.
- Koecher, Max (Dirichlet-Reihen) 55.
- Koethe, G. s. H. Prüfer 287.
- Kohler, Max (Einfluß der Austauschwechselwirkung auf Wärmeleitfähigkeit) 481.
- Kohn, Walter s. R. Jost 177.
- Koiter, W. T. (Partially plastic tubes) 140; (Stress-strain relations for elastic-plastic materials) 140.
- Kolmogoroff, A. A. (Stationäre Folgen. I, II.) 271.
- Komatu, Yūsaku (Boundary value problems for functions) 238.
- — and Imsik Hong (Mixed boundary value problems) 392.
- Kompaneec, A. S. und Ju. S. Sajasov (Gaufrage von Oberflächen) 468.
- Kon, Hideo s. Takeshi Nakajima 329.
- Kondo, Kenzi (Hall effect) 186.
- Kondō, Motokiti (Anneaux des opérateurs sur un espace de S. Banach. I.) 259.
- — et Tosiuyuki Tugue (Cribles par rapport aux mesures) 30.
- Kondorskij, E. und A. Pachomov (Spontane Magnetisierung) 187.
- Konijn, H. S. (Minimax procedures) 414, 415; (Statistical decision procedures) 415.
- Koning C. (Interference problems) 150.

- Kononenko, V. O. (Biege-Torsionsschwingungen) 311.
- Koopmans, Tjalling C. (Identification problems) 280.
- — — and Wm. C. Hood (Multaneous economic relationships) 280.
- — — s. Wm. C. Hood 279.
- Korickij, G. V. s. I. E. Bazi-levič 376.
- Korobov, N. M. (Bruchteile von Exponentialfunktionen) 362.
- Kosevič, A. M. s. I. M. Lifšic 187.
- Koster, G. F. s. J. C. Slater 186.
- Kostjučenko, A. G. (Struktur einer Fläche und ihre Hauptkrümmungen) 293.
- Kostjukov, A. A. (Bewegung eines Schiffes) 462.
- Koteljanskij, D. M. (Orthogonalisierungsmethode) 81.
- Kovner, M. A. und V. N. Kapštal (Aufspaltung der Schwingungsfrequenz von OH) 478.
- Kowalsky, Hans-Joachim (Topologische Kennzeichnung von Körpern) 354.
- Králik, D. (Nicht-meßbare Punktmengen) 226.
- Krames, J. (Geometrie der Restparallaxen) 304.
- Krasnovidova, I. S. und V. S. Rogožen (Bedingung für Schlichtheit) 239.
- Kratzer, A. (Physik und Mathematik) 1.
- Kraus, John D. (Electromagnetics) 154.
- Kreisel, G. (Problem of Henkin's) 6; (Functional relationship) 33; (Models for formulae of predicate calculus. II.) 200.
- Krejn, M. G. (Dichte einer inhomogenen Saite) 246.
- S. G. (Konforme Abbildung) 242; (Operatoren der Vektoranalysis) 426.
- Krickeberg Klaus (Integral-satz. I.) 31.
- Krishnan, Viakalathur S. (c-structures) 123.
- Krivoglaž, M. A. (Diffusion eingedrungener Atome) 331.
- Krull, Wolfgang (Galoissche Theorie) 347.
- Kruming, A. A. (Konvergenzradius von Potenzreihen) 62.
- Kryžanovskij, O. M. (Integral-kriterien für optimale Prozesse der Regelung) 266; (Kriterien der Qualität von Über-gangsprozessen der Regelung) 266.
- Krzywoblocki, M. Z. E. (Linear integral operator method) 147.
- — — V. (Friedrich's theorem) 146.
- Krzyż, Jan (Monotony-preserving transformations) 36.
- Krzyżański, Mirosław (Problème de Fourier) 390.
- Ku, C. H. and Su Buchin (Variations of volume integral) 431.
- Kubo, Tadao (Bounded analytic functions) 47; (Bergman kernel function) 50.
- Kubota, Tomio (Klassenzahlen der Unterkörper) 219.
- Kudô, Akio (Mean value of stochastic process) 411.
- Kudrjavcev, L. D. (Jacobische Funktionaldeterminante) 33.
- Kuessner, H. O. (Movements of the earth's crust) 192.
- Kühne, E. E. (Tafel für r^{-3}) 135.
- Kuiper, N. H. (Surfaces localement affines) 130; (Immersion isométrique) 297.
- Kulikov, L. Ja. (Primäre Gruppen. I. II.) 210.
- Kumar, Ram (Integral equation) 398.
- Jain, Mahendra s. Jain, Mahendra Kumar 238.
- Kurath, Dieter (jj-coupling model) 175.
- Kuratowski, K. et H. Steinhaus (Application géométrique du théorème de Brouwer) 121.
- Kurepa, Duro (Reflexive symmetric relations) 222.
- G. (Real and ordinal numbers) 30; (Auswahlaxiom) 223; (Opération de Suslin) 363.
- Kuroda, Tadashi (Classification of Fuchsian groups) 51.
- Kurosch, A. G. (Gruppentheorie) 10.
- Kuşnoğlu, Behram (Tamm-Dancoff equations) 172.
- Kurzweil, Jaroslav (Modifiziertes Dirichletsches Problem) 392.
- Kustaanheimo, Paul (Spherically symmetric metrics) 472.
- Küstner, H. (Fünfstellige Logarithmen der natürlichen Zahlen) 93.
- L'Abbé, Maurice (Systems of transfinite types) 203.
- Lacombe, Olivier s. Louis Renou 338.
- Laforgue, Alexandre (Calcul d'erreur en chimie quantique) 328; (Méthode des variations) 328; (Diagrammes moléculaires) 329; (Grandeurs moléculaires) 329.
- Lalan, Victor (Rotation spatiale) 164; (Transformations de Lorentz) 164.
- Lampariello, Agostino (Area di un quadrilatero) 111.
- Lance, G. N. and R. L. Perry (Water bells) 319.
- Landau, L. und I. Pomerančuk (Elektronen-Lawinenprozesse) 477; (Bremsstrahlung der Elektronen) 477.
- — D. (Vielfacherzeugung von Teilchen) 478.
- Landauer, Rolf and John Swansson (Diffusion currents) 184.
- Landé, Alfred (Probability) 324.
- Langefors, B. (Ill-conditioned matrices) 88; (Elastic structures) 89; (Stresses in wings) 138.
- Lapteŭ, G. F. (Eingebettete Mannigfaltigkeiten) 428.
- Lark-Horovitz, K. s. V. A. Johnson 184.
- Laško, A. S. (Verteilungskurve von Flüssigkeitsatomen) 330.
- Laue, Max von (Histoire de la physique) 338.
- Laurent-Duhamel, Marie-Jeanne (Contours oraniens) 416.
- Laurikainen, K. V. and E. K. Euranto (Approximate eigensolutions) 178.
- Lawson, R. D. (Photoproduction of π -meson pairs) 173.
- Leaf, Boris (Continuum in special relativity. II.) 165.
- Ledermann, W. s. G. E. H. Reuter 272.
- Ledinegg, E. und P. Urban (Eigenschwingungen isotroper elastischer Medien) 312; (Elastische Konstante) 331.
- Lee, E. H. (Plastic wave propagation) 449.
- T. D., F. E. Low and D. Pines (Slow electrons in polar crystal) 182.
- Tsung-Dao and David Pines (Interaction of a particle with a field) 182.
- Legger, R. J. (D'Alembert principle) 133.
- Legras, J. (Méthode de Light-hill) 460.
- Lehmann, H. (Tamm-Dancoff-Gleichungen) 172.

- Lehovec, Kurt (Trapped electrons in ionic solids) 183.
- Lehto, Olli (Deficiency in theory of meromorphic functions) 46.
- Leichtweiss, Kurt (Natürliche Gleichungen) 293.
- Lekkerkerker, C. G. (Modular forms) 54; (Measure of vectorial sum of point sets) 299.
- Lenard, Pal (Fluktuation der Ionisationsverluste) 478.
- Lennard-Jones, Sir John s. A. C. Hurley 478.
- Leonov, M. Ja. (Newtonsches Potential) 73.
- Leontowitsch, M. A. (Thermodynamik) 320.
- Leopoldt, Heinrich W. (Geschlechtertheorie) 355.
- Lesemann, K.-J. s. A. Walther 479.
- Lesky, Peter (Zweite Randwertaufgaben) 252; (Calcolo numerico) 263.
- Letov, A. M. (Stabilität von Regelsystemen) 248.
- LeVeque, W. J. (Mahler's U -numbers) 362.
- Levert, Christoffel (Plus grande valeurs) 103.
- Levin, J. H. s. R. F. Clippinger 265.
- V. I. (Asymptotische Entwicklungen von Funktionen) 371.
- Levitan, B. M. (Entwicklung nach Eigenfunktionen) 60; (Tauberscher Satz) 79.
- — — s. I. M. Gelfand 60.
- Lévy, M. Paul (Loi faible et loi forte) 409.
- Paul (Courbe du mouvement brownien) 101.
- Lewin, W. I. and J. I. Großberg (Differentialgleichungen der mathematischen Physik) 250.
- Lichnerowicz, André (Espaces homogènes kähleriens) 116; (Équations de la théorie unitaire) 167.
- Lidiard, A. B. (Overlapping energy bands) 186.
- Lieber, H. G. s. Lillian R. Lieber 197.
- Lillian R. (Infinity) 197.
- Lifšic, I. M. (Zerstörung der Supraleitfähigkeit) 483.
- — — und M. I. Kaganov (Supraleitfähigkeit) 483.
- — — und A. M. Kosevič (Magnetische Rezeptivität dünner Metallschichten) 187.
- Lighthill, M. J. (Upstream influence. II.) 147; (Boundary layers. I.) 147.
- Lin, C. C. (Similarity concepts in isotropic turbulence) 145; (Mean square value of integrals in turbulence) 153.
- Linnik, Ju. V. (Anwendungen der Lobačevskischen Geometrie) 26; (Gleich verteilte Statistiken) 273.
- — — und A. V. Malyšev (Anwendungen der Arithmetik der Quaternionen) 221.
- — — und V. S. Novoselov (Präzession eines Kreiseis) 437.
- Lions, Jacques-Louis (Problèmes aux limites) 69.
- Liou, Sheng-Lieh (p -groups) 209.
- Lipscomb, William N. s. Masao Atoji 332.
- Lipson, H. and W. Cochran (Crystal structures) 180.
- Litwinišyn, J. s. W. Olszak 452.
- Jerzy (Two-dimensional turbulent flow) 457; (Differential-integral equations of motion of a deformable fluid mass) 458.
- Liu, Hsien-Chih (Eigenschwingung einer idealen Flüssigkeit) 318.
- Ljapunov, A. A. (R -Mengen) 364.
- Lluis Riera, E. und F. Recillas Juárez (Über Primärideale in verallgemeinerten semilokalen Ringen) 216.
- — — Emilio (Über offene Ideale in Zariskischen Ringen) 216.
- Loevinger, Jane, Goldine C. Gleser and Philip H. DuBois (Multiple-score test) 276.
- Loewner, Charles (Systems of partial differential equations) 388.
- Logunov, A. A. und Ja. P. Terleckij (Primäre kosmische Strahlung) 477.
- Lombardo-Radice, Lucio (Piani grafici desarguesiani finiti) 107; (Piani a coordinate di Veblen-Wedderburn) 108.
- Longley-Cook, L. H. s. P. F. Hocker 417.
- Longo, Carmelo (Approssimazioni cremoniana delle trasformazioni puntuali) 421.
- Lopuchin, V. M. und V. S. Nikol'skij (Elektronik eines mit Blenden belasteten Wellenleiters) 467.
- Lopuszański, Jan (Stochastische Prozesse) 166.
- Lord, Frederic M. (Estimation of examinee's ability) 285.
- Lorent, H. (Chaines de courbes planes) 288; (Triangles rectangles) 289.
- Lorentz, G. G. and M. S. Macphail (Summability. III.) 36.
- Lorenzen, Paul (Ontologische und operative Auffassung der Logik) 1; (Komplettierung) 218.
- Lorey, Wilhelm (Persönliche Erinnerungen an einstige Akademie-Mitglieder) 197.
- Löringhoff, Bruno Baron v. Freytag s. Freytag Löringhoff, Bruno Baron v. 1.
- Lošakov, L. N. (Wellenfortpflanzung im Wellenleiter) 467.
- Lossky, N. O. (Analytic and synthetic propositions) 197.
- Lottrup Knudsen, H. (Antennensysteme) 321.
- Low, F. E. s. T. D. Lee 182.
- Lozinskij, S. M. (Konvergenzgeschwindigkeit) 235.
- Lucke, O. s. G. Fanselau 484.
- Ludford, G. S. S. (Riemann's method of integration) 388.
- Ludwig, G. (Meßprozeß) 474.
- Wilhelm (Biomathematik) 415.
- Lukasiewicz, Jan (System of modal logic) 6.
- Lukomskaia, M. A. (Gewisse Systeme partieller Differentialgleichungen) 387.
- Łunc, M. et A. Szaniawski (Propulsion hydraulique à réaction) 460.
- — s. H. Jarzyna 461.
- Michał (Kräfte, die auf eine Kontur in einer Flüssigkeitsströmung wirken) 453.
- Lufe, A. I. (Elastische Hohlkugel) 444.
- Luzzati, V. (Structure cristalline) 334.
- Ma, S. T. (Virtual level of deuteron) 327.
- Maass, Hans (Elliptische Modulfunktionen) 56; (Siegel'sche Modulfunktionen) 56.
- MacDonald, D. K. C. and S. K. Roy (Thermoelectric power) 185.
- Machida, Sigeru (D state probability of deuteron) 177.
- Machlup, S. and L. Onsager (Fluctuations. II.) 151.
- — s. L. Onsager 151.

- Macneal, R. H. (Difference network) 263.
- Macphail, M. S. s. G. G. Lorentz 36.
- Madelung, Otfried (Magnetische Effekte in Halbleitern) 186; (Homöopolare Halbleiter) 481.
- Magnetic fields of cylindrical and annular coils. 155.
- Magnus, Wilhelm (Diffraction by an aperture) 159.
- Mahler, K. (Approximation of π) 361.
- Maki, Ziro. Masatomo Sato and Sin-itiro Tomonaga (Intermediate-coupling theory. I.) 171.
- Mal'cev, A. I. (Algebraische Systeme) 17; (Möglichkeit, eine teilweise geordnete Gruppe zu ordnen) 350.
- Malécot, G. (Amortissement des fluctuations économiques) 418.
- Malyšev, A. V. (Darstellung von Zahlen durch ternäre quadratische Formen) 27.
- — — Ju. V. Linnik 221.
- Mancill, J. D. (Maxima and minima) 227.
- Mandelbrot, Benoit (Jeux de communication) 406.
- Mandl, Georg (Begründung der Strahlenoptik) 162.
- Mănă, Cesăreo Villegas s. Villegas Mănă, Cesăreo 319.
- Manfredi, Bianca (Temperatura in un mezzo che si muove) 320.
- Mannos, M. s. A. Hoffman 418.
- Maravall Casesnoves, Dario (Anziehung einer Kugel) 189.
- March, N. H. and B. Donovan (Spin paramagnetism) 186.
- Marchington, B. s. N. Kitz 265.
- Marchionna, Ermanno (Proiezioni delle varietà intersezioni complete) 422; (Varietà aritmeticamente normali) 422.
- Marcus, F. (Surfaces R_0) 295; (Lignes isothermiquement conjugués sur une surface) 427.
- Ruth Barcan (Strict implication) 341.
- S. (Propriétés des fonctions réelles) 225; (Continuité approximative qualitative) 366; (Dérivée approximative qualitative) 366; (Limite approximative qualitative) 366.
- Mařík, Jan (Quadratische Polynome) 361.
- Marinescu, G. (Équations à différences finies) 259; (Séparation des ensembles convexes) 399.
- Martiz, J. S. (Correlation coefficient) 413.
- Markus, L. (Topological theory for ordinary differential equations) 64; (Invariant measures) 383.
- Marschak, Jacob (Economic measurements) 279; (Équipes et organisations en régime d'incertitude) 283.
- Marshall, J. B. (Redemption yields) 278.
- Martić, Ljubo (Dreihundert Jahre Wahrscheinlichkeitsrechnung) 339.
- Martin, Charles N. (Énergie seuil d'une réaction nucléaire) 177.
- M. H. (edited by) (Fluid dynamics) 142.
- — — and W. R. Thickstun (Transonic flow for Tricomi gas) 149.
- Norman M. (Decision element sets) 92.
- R. M. (Truth and multiple denotation) 2.
- W. T. s. S. Bochner 53.
- Martinelli, Enzo (Formula integrale di Cauchy) 52; (Integrali invarianti sulle varietà algebriche) 115; (Varietà a struttura complessa) 297.
- Martínez, Rodolfo Morales s. Morales Martínez, Rodolfo 303.
- Marton, L. (edited by) (Advances in electronics. V.) 465.
- Martyn, D. F. (Electric currents in ionosphere. III.) 335.
- — — s. W. C. Baker 335.
- Marumori, Toshio s. S. Ogawa 175.
- Marušin, M. N. (Lemma von S. N. Bernštejn) 97.
- Maryama, Gisirō (Markov processes and stochastic equations) 408, 409.
- Massé, P. et G. Morlat (Classement économique des perspectives aléatoires) 282.
- Massera, J. L. and J. J. Schäffer (Level curves of convex surfaces) 34.
- Massey, W. S. (Homotopy groups of triads) 128.
- — — s. A. L. Blakers 128, 129.
- Masuda, Katsuhiko (Mappings of groups into fields) 15.
- Mathews, P. M. s. A. Ramakrishnan 178, 407.
- Matrai, T. (Rigid motion) 471.
- Matschinski, Matthias (Statistique de polygones) 101; (Probabilité d'une hypothèse) 412.
- Matsusaka, Teruhisa (Theorems on Abelian varieties) 421.
- Matsuyama, Noboru (Series with monotone terms) 230; (Trigonometrical series. II.) 234.
- — — s. Shin-ichi Izumi 234.
- Sadahiko and Hironari Miyazawa (Meson-deuteron reaction) 177.
- Mathieu, P. (Hypoidgetriebe. II.) 438.
- Matveev, A. N. (Operatoren-methode) 475.
- Maue, A. W. (Beugung elastischer Wellen) 449.
- May jr., Donald Curtis s. R. St. Burlington 101.
- Mayer, S. W. and K. N. Trueblood (Fourier summations) 265.
- Mazet, R. (Systèmes non linéaires) 133.
- McConnell, James (Meson production) 177; (Weizsäcker-Williams method) 177.
- — — s. A. W. Conway 132.
- McCrea, W. H. (Lyttleton theory of comets) 189.
- McKinsey, J. C. C. (Systems of modal logic) 2.
- McLellan, A. G. (Stress tensor) 179.
- McNaughton, Robert (Formal relative consistency proofs) 5.
- McVittie, G. C. (Equations of classical gas-dynamics) 472.
- Mecugov, V. Ch. (Biegung eines prismatischen Balkens) 306.
- Medlin, Gene W. (Greatest characteristic root) 8.
- Meerović, L. A. (Nichtmonotone Übergangsfunktionen der Mehrkaskadensysteme) 478.
- Meier, Rudolf s. Kurt Schuster 481.
- Meijering, J. L. (Interface area in crystal aggregates) 334.
- Meixner, J. (Thermodynamische Theorie der Relaxationserscheinungen) 448.
- Melzak, Z. Alexander (Coalescence in collision processes) 152.
- Mendelsohn, N. S. (Combinatorial analysis) 7.

- Meredith, Carew A. (Systems (C, N) , $(C, 0)$ and (A, N)) 2; (Single axiom of positive logic) 197.
- Méric, Jean (Paramètre d'une loi binomiale) 412.
- Merle, Pierre s. Louis Renou 338.
- Mertens, Robert (Diffusion multiple) 177.
- Meserve, Bruce E. (Geometry) 285; (Irriducibilità del risultato) 347.
- Mestel, L. (Rotation and stellar evolution) 191.
- Meszar, John s. William Keister 403.
- Métral, Paul (Invariants arithmétiques) 54.
- Mettler, E. (Oscillations des corps élastiques) 134.
- Meyer, R. E. (Waves in ducts) 150.
- Meyer-König, W. und K. Zeller (Limitierungsverfahren) 35.
- Michalup, Erich (Interpolation formulae) 265.
- Michel, Pierre (Spectroscopie d'émission) 178.
- Michlin, S. G. (Singulärer Integraloperator) 77.
- Mihăileanu, N. (Formules de Frenet) 296.
- Mihailović, Dobrivoje (Due corpi colle masse permutabile) 189.
- Mikeladze, S. E. (Stabilität einer Platte) 307.
- Mikhail, M. N. (Basic sets of polynomials) 373; (Reciprocal set of a basic set of polynomials) 374.
- Mikolajski, Z. (Mouvements asymptotiques) 384.
- Mikolás, Miklós (Summatorische Funktionen von Möbiusschem Charakter) 219.
- Mikusiński, J. G.- (Dérivée algébrique) 19; (Conditions mixtes pour les équations aux dérivées partielles) 389.
- Jan (Operatorenrechnung) 85.
- Miles, John W. (Subsonic edges in supersonic flow) 317.
- Milgram, A. N. s. N. Aronszajn 65.
- Millán, Gregorio s. Th. von Kármán 150.
- Miller, K. S. (Partial differential equations) 263.
- Maximilian (Linien dritter Ordnung) 196.
- Milloux, Henri (Méthodes générales. I.) 43.
- Minasjan, R. S. (Temperaturverteilung prismatischer Körper) 321.
- Minorsky, N. (Phénomène Béthenod) 135; (Systèmes oscillatoires) 156.
- Miranda, Carlo (Forme differenziali) 64; (Equazioni integrali) 76.
- Mises, Richard von and Theodore von Kármán (edited by) (Advances in applied mechanics. 3.) 436.
- Mishra, R. S. (Congruences of curves) 297.
- Mitehner, M. s. J. M. Burgers 144.
- Mitome, M. s. T. Kitagawa 273.
- Mitrinovič, Dragoslav S. (Équation fonctionnelle) 88.
- Mitropol'skij, Ju. A. (Schwingungen in Gyroskopsystemen) 133.
- Miyadera, Isao (One-parameter semi-group of operators) 85.
- Miyazawa, Hironari s. S. Matsuyama 177.
- Mizohata, Sigeru (Équations différentielles régissant phénomènes héréditaires) 61.
- Modona, Lionella Neppi s. Neppi Modona, Lionella 59.
- Moffitt, W. (Electronic spectra) 330.
- — and J. Scanlan (Ethylene molecule) 330; (Electronic energy levels) 330.
- Mohnsane, Mathias (Processus stochastiques) 412.
- Mohr, Ernst (Determinantensatz von Sylvester) 346.
- Moise, E. E. s. O. G. Harrold jr. 126.
- Moisil, Gr. C. (Mouvements des liquides visqueux incompressibles) 455.
- Monin, A. S. und A. M. Obuchov (Turbulenz in der Atmosphäre) 192.
- Montroll, Elliot W. s. G. F. Newell 186.
- Morales Martínez, Rodolfo (Topologien für Räume stetiger Funktionen) 303; (Topologie der regulären Konvergenz) 303.
- Moran, P. A. P. (Random division of interval. III.) 99.
- Morgan, G. W. (Eigenvalue problems) 246.
- Morgantini, Edmondo (Configurazione di quattro rette) 288.
- Morgenstern, O. s. J. v. Neumann 93.
- Mori, Yoshiro (Integral closure of an integral domain) 217.
- Morin, Ugo (Geometria. I.) 195; (II—IV.) 106.
- Morita, Kiiti (Product spaces) 124; (Spaces having weak topology) 124; (Theorem of C. Kuratowski) 258; (Group rings over a modular field) 350.
- Morlat, G. s. P. Massé 282.
- Moroškin, Ju. F. (Geometrie der Mechanismen) 426.
- Morpurgo, G. and B. F. Tuschek (Tamm-Dancoff method) 172.
- Moser, Leo (Formula of Mendelsohn) 7.
- Moses, H. E. (Schwinger's variational principle) 170.
- Moshinsky, Marcos (S matrix for resonance reactions) 170.
- Mossakowskij, V. I. (Räumliche Kontaktaufgaben) 444.
- Mossakowski, J. s. W. Nowacki 445.
- Mostowski, A. (System of axioms) 3; (Axiomatic systems) 201.
- — s. A. Tarski 4.
- Mott, N. F. (Mécanique ondulatoire) 325.
- Mourier, E. (Éléments aléatoires) 95.
- — s. R. Fortet 96.
- Müller, F. Horst (herausgegeben von) (Relaxationsverfahren der Materie) 448.
- Hans Robert (Bressische Kreise) 132; (Flächenläufige Bewegungsvorgänge I, II.) 426.
- W. s. H. Dänzer 318.
- Wilhelm (Wärmeübertragung) 146.
- Mulholland, H. P. (Central limit theorem) 96.
- Murata, Kentaro s. Keizo Asano 349.
- Muses, C. A. (Relativity theory after a half-century) 470.
- Myhill, John (Arithmetic) 200.
- Myller, A. (Chemins de profil longitudinal) 427; (Équation arco-radiale de Sylvester) 428.
- Myrberg, P. J. (Picardsche Gruppe) 380.
- Naftalevič, A. G. (Interpolation von Funktionen) 44.
- Nagata, Masayoshi (Local rings) 18.
- Nagornyj, N. M. (Reduktionsatz der Theorie der Algorithmen) 345.
- Nakada, Osamu (Partially ordered abelian semigroups. I.) 211.

- Nakai, Yoshikazu (Independency of differential forms) 114.
- Nakajima, Takeshi and Hideo Kon (Electron model of porphine) 329.
- Nakamura, Masahiro (Lemma of Sunouchi and Yano) 124.
- Nakano, Hidegorô (Topologies on semi-ordered linear spaces) 257; (Transcendental points in proper spaces) 258; (Spectral theory in Hilbert space) 400.
- Huzio (Many electron problem) 184.
- Nakayama, Tadasi (3-cohomology class) 356.
- Nanda, V. S. (Gentile statistics) 152; (Bose-Einstein condensation) 330.
- Narayan, Shanti (Matrices) 204.
- Nariai, Hidekazu (Kinematic relativity) 166; (Jordan's projective relativity) 473.
- Nash, John P. (Convergence of Fourier series) 233.
- W. A. (Shells subject to hydrostatic pressure) 445.
- Nasr, Saad Khalil (Sequences associated with series) 35.
- — — s. Sh. Doss 61.
- Nasvytis, A. (Kombinatorische Technik) 7.
- Nataf, André (Agrégation en économétrie) 418.
- Natanson, I. P. (Summierung unendlich kleiner Größen) 31.
- Nath Nigam, Amar, Yatendra Pal Varshni and Mahendra Singh Sodhar (Interference in optical instruments) 161.
- Natucci, A. (Funzioni ellittiche) 197.
- Nazarjan, A. G. (Freie Oberfläche einer offenen Strömung) 142.
- Nečae, V. I. (Waringsches Problem für Polynome) 359.
- Nekrasov, A. I. (Potentialbewegung einer Flüssigkeit) 453.
- Németi, L. (Tensions thermiques dans des tubes aux parois minces) 439.
- — — s. D. V. Ionescu 439.
- Neppi Modona, Lionella (Equazione differenziale non lineare) 59.
- Neuman, Maurice (Radiation of high energy electron) 170; (Green's function method) 172.
- Neumann, B. H. s. A. G. Kuersch 10.
- Neumann, J. v. and O. Morgenstern (Theory of games) 93.
- Neut, A. van der (Instability of compression members) 138.
- Nevanlinna, Rolf, (Uniformisierung) 50; (Four-dimensional space) 106.
- Newell, Gordon F. and Elliott W. Montroll (Ferromagnetism) 186.
- Neyman, Jerzy and Elizabeth L. Scott (Frequency of separation) 189.
- Nicolau, Edmond (Équations des potentiels du champ électromagnétique) 464; (Relations de réciprocité et de conservation en électricité) 466; (Séries de radiateurs) 467.
- Nicolescu, Miron (Fonctions polyharmoniques presque périodiques) 380.
- Nigam, Amar Nath. s. Nath Nigam, Amar 161.
- Nikol'skij, S. M. (Polyharmonische Gleichung) 74.
- V. S. s. V. M. Lopuchin 467.
- Nilsson, Sven Gösta (Motion of electrons in magnetic fields) 323.
- Nisida, Tosio (Probability distributions) 407.
- Nitsche, Joachim und Johannes (Systeme elliptischer Differentialgleichungen) 252.
- Johannes (Kanonische Differentialgleichungen) 246.
- — — s. Joachim Nitsche 252.
- Nöbauer, Wilfried (Restklassen nach Restpolynomidealen) 205.
- Noether, M. s. Bernhard Riemann 194.
- Noi, Salvatore di (Interpretazione cinematografica d'una geometria) 109.
- Nollet, Louis (Courbes tracées) 423.
- Nomachi, Yukio s. T. Kitagawa 105.
- Nôno, Takayuki (Mutual connectedness of elements in lattices) 302.
- Norlund, Niels Erik (Fonctions hypergéométriques) 371.
- Norris, Michael J. (Cofinally concentrated directed systems) 30.
- Novák, J. (Cartesian product of spaces) 124; (E. Čech) 340; (Problems of Luzin) 363.
- Novikov, P. S. (Sätze der deskriptiven Mengenlehre) 364.
- Novoselov, V. S. s. Ju. V. Linnik 437.
- Novozilov, Ju. V. (Wahl des „ungestörten“ Energieoperators) 173.
- Nowacki, W. and J. Mossakowski (Influence surfaces of plates) 445.
- Witold (Torsion of bars) 445; (Vibrations and buckling of plates) 449.
- Nowinski, Jerzy (Torsion of a rectangular rod) 445.
- Nožička, František (Krümmungsskalare einer Fläche) 427.
- akley, C. O. s. C. B. Alldoerfer 194.
- Obata, Morio s. Shigeru Ishihara 298.
- Obrechhoff (Obreškov) Nikola (Approximation diophantique) 28; (Summierung divergenter Reihen) 369; (Classes de fonctions et de suites) 371; (Integraldarstellungen rechter Funktionen) 397.
- Obuchov, A. M. s. A. S. Monin 192.
- Ödman, S. T. A. (Boundary value problems. I.) 69.
- Odquist, Folke K. G. (Influence of primary creep on stresses) 310.
- Offenbacher, Elmer L. and Herbert B. Callen (Electric breakdown of ionic crystals) 184.
- Oganesjan, L. A. (Verteilung der transversalen Geschwindigkeiten) 145.
- Ogawa, Syūzō and Toshio Marumori (Nuclear saturation) 175.
- Ogievskij, I. E. (Summationsmethoden von Abel und (C, α, β)) 37.
- Ohkuma Tadashi (Homogeneous chains) 222.
- Ohnishi, M. (Intuitionistic functional calculus) 342.
- Ohta, Tokio (Light absorption in crystals) 183.
- Oka, Kiyoshi (Fonctions analytiques. IX.) 243.
- Okada, Shōzō s. Takesi Hayasi 480.
- Okayama, Taisuke (Degenerating ensemble) 152.
- Okonogi, Hisaichiro s. O. Hara 170.
- Okugawa, Kōtarō (Algebraic differential equations) 20.
- Olsen, J. L. s. F. H. J. Cornish 188.
- Olszak, W. et J. Litwiniszyn (Phénomène non-linéaire

- d'écoulement d'un liquide) 451.
- Olszak, Wacław (Membrane élastique) 446; (Problème de l'orthotropie) 446.
- Omar-al-Hajjāmī (Omar Chajjam) (Mathematische Traktate Omar-al-Hajjāmīs) 195.
- Onicescu, O. (Intégrales singulières) 258; (Mécanique nouvelle des systèmes matériels) 471.
- Ono, Isao s. Shigeo Ozaki 239, 377.
- Onsager, L. and S. Machlup (Fluctuations) 151.
- — s. S. Machlup 151.
- Öpik, U. s. D. R. Bates 329.
- Oppenheim, A. (Representation of real numbers) 39.
- Oprea, A. (Groupe euclidien) 428.
- Orlicz, W. (Convergence of functionals) 82.
- Orloff, Constantin (Transformations géométriques des séries) 35; (Théorie des spectres mathématiques de Michel Petrovitch) 267.
- Orlov, S. A. (Defektindex) 58.
- Ornstein, Wilhelm (Rectangular plates) 138.
- Ostapenko, V. N. (Filtration in fast homogenem Medium) 462.
- Ostrowski, A. (Cyclic single step iteration) 262.
- — M. (Simultaneous systems of equations) 34.
- Oswatitsch, Klaus s. F. Keune 143.
- Ottaviani, Giuseppe (Legge di estinzione) 278.
- Ozaki, Shigeo (Multivalent functions) 240.
- — and Isao Ono (Pseudomeromorphic functions) 378.
- — — and Mitsuru Ozawa (Function-theoretic identities. I, II.) 239, 377; (Pseudomeromorphic function) 377; (Pseudo-meromorphic mappings) 378.
- — and Tokunosuke Yosida (Multivalent functions) 240.
- Ozawa, Mitsuru (Topology of subharmonic functions) 75.
- — s. Shigeo Ozaki 239, 377.
- Pachonov, A. s. E. Kondorskiĭ 187.
- Paige, Lowell J. and Charles Wexler (Incidence matrices) 108.
- Pailloux, Henri (Équations qui se décomposent) 66.
- Pais, A. (Baryon-meson-photon system) 173.
- Palamà, Giuseppe (Somme uguali di potenze simili) 24; (Diophantine systems) 25.
- Palazzo, Elena (Ellissi aventi lo stesso asse maggiore) 288.
- Pan, T. K. (Curves of an orthogonal ennuple) 115.
- Panvini, Jean (Geometrie non archimedee) 418.
- Papapetrou, A. (Bewegung in der allgemeinen Relativitätstheorie) 472.
- Parasjuk, O. S. (Ergodizität geodätischer Ströme) 297.
- Parodi, Maurice (Polynomes de Tehebieheff) 346.
- Parrish, W. M. G. Ekstein and B. W. Irwin (X-ray analysis. II.) 331.
- — and B. W. Irwin (X-ray analysis. I.) 331.
- Paskevič, V. S. (Kontrolldiagramme) 104.
- Pasqua, Dario del (Calcolo delle matrici) 204.
- — — e Franco Pellegrino (Operatori lineari) 87.
- Pater, A. D. de (Stabilité d'un dicône) 142.
- Pauli, W. (Non-local field theories) 173.
- Pavel, Monica (Petites déformations des espaces fibrés) 300; (Classes d'homotopie des transformations) 434.
- Payne, L. E. (Symmetric punch, crack and torsion problems) 439.
- Pchakadze, Š. S. (Iterierte Integrale) 366.
- Pearson, Carl E. (Self-propagation of turbulent spots) 316.
- J. D. (Diffraction of electromagnetic waves) 159.
- Peierls, R. E. s. M. Chrétien 173.
- Pellegrino, Franco s. D. del Pasqua 87.
- Pepinsky, R. s. V. Vand 180.
- Pereira Gomes, A. (Méthode de Monaghan) 453.
- Permutti, Rodolfo (Connessi di dimensione qualunque) 113; (Equazioni algebriche) 218; (Spazi affini generalizzati) 286.
- Perry, R. L. s. G. N. Lance 319.
- Petermann, A. (Séries divergentes) 476.
- — s. E. C. G. Stueckelberg 476.
- Petiau, Gérard (Diffusion des corpuscules) 169.
- Petrescu, Șt. (Espaces P_2) 119; (Espaces F_2 à connexion projective) 119.
- Pham-Man-Quan (Fluide relativiste) 165; (Problème de Cauchy) 166.
- Philbert, Georges (Répartition des supra-courants) 483.
- Phillips, R. S. (Perturbation theory) 87.
- Pi Calleja, Pedro (Integralbegriff. II.) 226.
- Piaggio, H. T. H. (Exceptional integrals of a total differential equation) 64.
- Piazzolla Beloch, Margherita (Triangolazione aerea grafica) 304.
- Pignedoli, A. und F. Rubbiani (Statistica grafica) 304.
- Piloty, Robert (Dualzahlen) 92.
- Pineda, Ignacio Frisancho s. Frisancho Pineda, Ignacio 213.
- Pines, David (Electron interactions. IV.) 182.
- — s. D. Bohm 182.
- — s. T. D. Lee 182.
- Pini, Bruno (Problema di Dirichlet) 251.
- Pinl, Max (Satz von G. Ricci-Curbastro) 294.
- Pisot, Charles s. H. Milloux 43.
- Pitts, E. (Electrolyte solutions) 179.
- Pjateckij-Šapiro, I. I. (Primzahlen in Folgen) 27; (Fragen aus der Theorie der trigonometrischen Reihen) 221.
- Plantema, F. J. and W. J. van Alphen (Compressive buckling of sandwich plates) 307.
- Platzman, R. L. s. H. Fröhlich 181.
- Plebański, J. (Hyperbolische Differentialgleichungen) 250.
- Pliss, V. A. (Integralkurven und Stabilitätsgebiete von Differentialgleichungen) 62.
- Plume, Z. Ja. s. I. M. Taksar 482.
- Podstrigač, Ja. S. (Spannungen in einer Ebene) 308.
- Poitou, Georges (Approximation des nombres complexes) 28.
- Pol, Balth. van der (Équation différentielle) 59.
- Polemio, Raffaele (Geometrie non euclidea sulla ipersfera di Riemann dell' S_3) 286.
- Poli, Angelo s. Aldo Ghizzetti 460.
- L. (Fonctions hypergéométriques) 236.
- Pollaczek, Félix (Systèmes téléphoniques) 407.

- Položij, G. N. (Bewegung der Grenzpunkte) 150.
- Polubarinova-Kočina, R. Ja. (Instationäre Filtration eines Gases in einem Kohlenflöz) 462.
- Pomerancev, N. M. s. S. D. Gvozdover 178.
- Pomerančuk, I. s. L. Landau 477.
- Pompeiu, D. (Représentation des fonctions analytiques) 375.
- Poots, G. s. D. R. Bates 329.
- Pople, J. A. s. A. Brickstock 478.
- Popović, Božidar (Influence d'une rotation du système solaire sur le mouvement des planètes) 189.
- Popovici, Andrei (Principe de la réciprocity) 471.
- Constantin (Fortsetzung analytischer Funktionen) 243.
- Popoviciu, Tiberiu (Algorithme d'Euclid) 357; (Partition des nombres) 358.
- Popp, Simona (Mouvement d'un fluide compressible) 315.
- Postnikov, A. G. (Tauberscher Satz) 44.
- Potjagajlo, D. B. (Hyperbolizität von Riemannschen Flächen) 377.
- Potop, A. (Application de la théorie cinétique des gaz parfaits aux émulsions) 330.
- Povšič, Jože (F. Hočevars) 340.
- Powell, James H. s. Leo Katz 276.
- Prakash, Prem (Two dimensional steady flows) 313.
- Prasad, Chandrika (Radial oscillations model) 335.
- Pratelli, Aldo M. (Principi variazionali nella meccanica dei fluidi) 459.
- Price, P. J. (Superfluid He³-He⁴ mixtures) 180.
- Probstein, Ronald F. (Energy equation for rotating plate) 138.
- Procissi, Angiolo („Ragionamenti d'algebra“) 196.
- Prodi, Giovanni (Equazioni non lineari di tipo parabolico) 69.
- Prüfer, H. (Projektive Geometrie) 287.
- Pták, Vlastimil (Einbettung von Semigruppen) 348.
- Pucci, Carlo (Equazioni differenziali lineari) 58; (Studio col metodo delle differenze di un problema di Cauchy) 68.
- Queney, P. (Résonance interne du jet-stream) 336.
- Quenouille, M. H. (Design and analysis of experiment) 273.
- Quensel, Carl-Erik (Partial correlation coefficient) 102.
- Quine, W. V. (ω -inconsistency) 5; (Two theorems about truth functions) 198; (Modal involvement) 342.
- Qurashi, M. M. (Inequalities method of sign determination) 333.
- — — and V. Vand (Least-squares and steepest-descent methods) 333.
- Rabson, Gustave (Fourier series) 83.
- Rachajsky, B. (Transformations de contact) 67.
- Rachmanov, B. N. (Schlichte Funktionen) 48, 241.
- Rado, F. (Système linéaire infini) 399.
- Radziszewski, Konstanty (Figures inscrites et circonscrites) 122.
- Raik, A. E. (I. M. Pervušin) 339.
- Raithel, Aldo (Frequenza fondamentale dei sistemi solidali) 311.
- Raj, Des (Parameters of normal populations) 105; (Parameters of binormal populations) 412.
- Rajagopal, C. T. (Inequalities for analytic functions) 46.
- Raljević, Šefkija (Polygones des zéros des polynômes) 346.
- Ramakrishnan, Alladi (Stochastic processes) 100.
- — — and P. M. Mathews (Fluctuation problem of electron cascades) 178; (Stochastic integro-differential equations) 407.
- Ramsey, N. F. (Nuclear moments) 327.
- Raney, George N. (Distributive complete lattices) 352.
- Rankin, R. A. (Product of differences) 221.
- Rao, K. Subba (Fibonacci numbers) 39.
- Rašajski, B. (Caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles) 67.
- Raševskij, P. K. (Operatorenrechnung auf Randwertaufgaben) 86.
- Rasiowa, H. and R. Sikorski (Notion of satisfiability) 2.
- Rastogi, R. P. s. B. N. Srivastava 463.
- Rathie, C. B. (Theorem in operational calculus) 255.
- Rauch, H. E. (Differential geometry in the large) 430.
- Ravetz, J. R. s. L. C. Hsu 255.
- Ray, M. (Disturbances in a compressible flow) 313.
- Raychaudhuri, Amal Kumar (Strahlungsfelder mit Zentralsymmetrie) 166.
- Rayski, J. s. W. Hanus 174.
- Jerzy (Renormierungstechnik in der Quantenelektrodynamik) 476.
- Recillas Juárez, F. s. E. Lluís Riera 216.
- Redheffer, R. M. (Poisson law) 267.
- Reenpää, Yrjö (Anschauungsmannigfaltigkeit) 106.
- Reich, E. (Random walk related to capacitance of plate condenser) 321.
- Reichenbach, Hans (Mécanique des quanta) 168.
- Rellich, F. (Perturbation theory of eigenvalue problems) 88.
- Remez, E. Ja. (Čebyševsche Annäherung) 43.
- Renou, Louis et Jean Filliozat (Inde classique. II.) 338.
- Rényi, Alfred (Bolyai-Lobachevskische Geometrie) 345; (Winkel eines Vielecks) 420.
- Rettig, A. S. s. W. C. Carter 2.
- Reuter, G. E. H. and W. Ledermann (Transition probabilities) 272.
- Rezanov, A. I. (Elektrische Leitfähigkeit ferromagnetischer Metalle) 187.
- — — und V. I. Čerepanov (Wärmeleitung ferromagnetischer Metalle) 187.
- Rice, H. G. (Recursively enumerable sets) 3.
- Richardson, Moses (Irreflexive relations) 29.
- Richter, Hans (Wahrscheinlichkeitstheorie. III—V.) 405.
- Riddell jr., Robert J. (Feynman diagrams) 171.
- Rieger, G. J. (Waringsches Problem) 359.
- Riemann, Bernhard (Werke und Nachlaß) 194.
- Riera, E. Lluís s. Lluís Riera, E. 216.
- Riguet, Jacques (Concepts de machine de multipole) 17.
- Ríos, S. (Wahrscheinlichkeitsgesetze) 98.
- Rios de Souza, Jayme (Kollimationen in der Ebene) 287.

- Ripe, Dayle D. (Sampling problems in factor analysis) 414.
- Risco, M. (Effet Doppler) 164.
- Ritchie, Alistair E. s. William Keister 403.
- Robbins, H. s. G. Kallianpur 100.
- Herbert (Equidistribution of sums) 267.
- Robinson, Raphael M. s. A. Tarski 4.
- Rodeja F., E. G. (Diophantische Gleichung) 24.
- Rodnjanskij, A. M. (Abbildungsgrad) 226.
- Rogers, T. A. s. W. T. Thomson 141.
- Roglić, Velimir (Saint-Venant'sche Bedingung) 154.
- Rogožin, V. S. s. I. S. Krasnovidova 239.
- Rohde, F. Virginia (Deflections of a cantilever beam) 137.
- Rohrbach, Hans s. Georg Feigl 194.
- Romanenko, S. V. (Gasfluß) 314; (Strömungszustände eines zähen Gases) 314; (Strömung eines zähen Gases) 455.
- Rooney, P. G. (Laplace's method) 78.
- Rosçulet, Marcel N. (Fonctions d'une variable hypercomplexe) 379.
- Rose, Alan (Self-dual primitive functions) 199; (m -valued calculus) 199; (Sobociński's propositional calculus) 199; (Self-dual primitives) 199; (Conditioned disjunction) 199; (Łukasiewicz propositional calculus) 200; (λ_0 -valued propositional calculus) 200.
- Gene F. (Propositional calculus) 199.
- Rosenberg, Alex (Irreducible representations) 259.
- Rosenblatt, Murray s. Ulf Grenander 410.
- Rosenblum, S. (Magnétisme) 185.
- Rosenthal, Arthur (Functions with infinitely many derivatives) 228.
- Rossum, H. van (Orthogonal polynomials) 371.
- Rostovcev, N. A. (Komplexe Spannungsfunktionen) 447.
- Roth, Leonard (Three-folds) 423; (Elliptic three-folds) 423.
- Roy, A. E. s. P. A. Sweet 190.
- S. K. s. D. K. C. MacDonald 185.
- T. C. (Stellar model) 190.
- Royden, H. L. (Ideal boundary of Riemann surface) 51.
- Roždestvenskij, B. L. (Ebenes Schallrohr) 454.
- Rozenfel'd, B. A. und A. P. Juškevič (Omar-al-Hajjāmi) 195.
- — — s. Omar-al-Hajjāmi (Omar Chajjam) 195.
- Rubbiani, F. s. A. Pignedoli 304.
- Rubin, H. s. H. Chernoff 281.
- Rubinowicz, A. (Kirchhoffsche Beugungswelle) 159.
- Ruchadze, A. K. (Biegung eines Stabes) 306.
- Ruderman, M. A. s. E. M. Henley 327.
- Rudik, A. (Einfangen eines μ -Mesons) 177.
- Rumer, Ju. B. (Optisch-mechanische Analogie) 470.
- Rumney, Max (Equations in polynomials) 8.
- Rund, Hanno (Méthodes de la géométrie) 436.
- Ryll-Nardzewski, C. (Poisson process. I.) 98.
- — — s. S. Hartman 57.
- Rzewuski, Jan (Conservation laws) 174; (Non-local field theories) 174; (Fields and particles) 174.
- Sabac, Ion Gh. (Retour de 180° d'un courant plan) 452.
- Šachl, Vladimír (Diffraction of electromagnetic waves) 160.
- Sachs, George s. Oscar Hoffman 310.
- Sadosky, Manuel (Rechenverfahren) 260.
- Šafarevič, I. R. (Kronecker-Weberscher Satz) 355.
- Sagomonjan, A. Ja. (Méthode der Charakteristiken) 459.
- Šaichin, A. et A. Halanay (Équation de mouvement du train) 384.
- Sajasov, Ju. S. (Störung der elektromagnetischen Eigenschwingungen) 158.
- — — s. A. S. Kompaneec 468.
- Saksena, K. M. (Stieltjes transform) 78; (Inversion formulae for a Laplace integral) 255.
- Salam, Abdus (Superconductivity) 188; (Cosmological theory) 473.
- Saltykow, N. (Équations différentielles ordinaires) 247; (Équations aux dérivées partielles) 250; (Domaine d'existence des équations aux dérivées partielles) 250; (Reform des mathematischen Unterrichts) 337.
- Salvadori, M. G. and F. Dimaggio (Plastic hinges in rigid-plastic beams) 140.
- — — and R. J. Schwarz (Differential equations) 263.
- Salzer, H. E. (Hermite polynomials) 92.
- Šamanskij, V. E. (Konforme Abbildungen naher Bereiche) 319; (Konforme Abbildungen in der Theorie der Filtration) 376.
- Sambo, Alberto (Derivazione delle funzioni composte) 227.
- Sampei, Yoemon (Boolean polynomial. II.) 198.
- Samuel, Pierre (Lüroth's theorem) 19; (Algèbre locale) 19.
- Samuelson, Paul A. (Utilité, préférence et probabilité) 283; (Integral equations) 402.
- Sánchez-Díaz, Rafael (Group involving quasinverse elements) 9.
- Sandgren, Lennart s. Carl Hyltén-Cavallius 419.
- Sands, M. and B. Touschek (Strong-focusing synchrotron) 162.
- Sanielevici, S. (Formes $x^2 + Ay^2$) 361; (Décomposition d'un nombre entier) 361.
- Santi, Gianoberto s. D. Zanobetti 58.
- Sanxal, G. S. (Radiation properties of the open end of a waveguide) 159.
- Sargan, J. D. (Correlogram and periodogram) 413.
- Sargent, W. L. C. (Some theorems) 81.
- Sarkar, G. K. s. N. K. Chakrabarty 237.
- Sasakawa, Tatuya and Tatur Sawada (Asymmetric fission) 177.
- Sasayama, Hiroyoshi (Invariant differential form) 298.
- Satake, Ichiro (Bounded symmetric domains) 120.
- Sato, Iwao (Nuclear forces) 176.
- Masatomo s. Z. Maki 171.
- Savage, L. J. (Axiomatisation de comportement raisonnable) 283.
- Sawada, Tatturo s. T. Sasakawa 177.
- Sawyer, D. B. (Covering of lattice points) 28.
- Sayre, David (Double Patterson function) 333.

- Sbrana, Francesco (Equazioni dell'elasticità) 305.
- Scanlan, J. s. W. Moffitt 330.
- Schaefer, Hermann (Reduktion eines linearen Eigenwert - problems 2. Ordnung) 386.
- Schäffer, J. J. s. J. L. Massera 34.
- Schaffhauser-Graf, Edith (Feldtheorie der Gravitation) 167.
- Schatzman, Evry (Noyaux cométaires) 189; (Granulation solaire) 190.
- Schellenberger, M. (Zahlwort und Schriftbild) 194.
- Schenk, H. s. U. Dehlinger 183.
- Scherk, P. (Curves of order n in n -space) 121.
- Schiffer, M. s. Stefan Bergman 390.
- Schlögl, F. (Symmetriekräfte im Kern) 175.
- Schmid, Wilhelm (Erzeugung einer Koppelkurve) 438.
- Schmidt, Helmut (Verteilungsfunktionen) 152.
- Jürgen (Filtertheorie. II.) 29.
- Schmutzer, Ernst (Kovolumen in der Theorie der Elektrolyte) 479.
- Schoenberg, I. J. (Theorem of Kirzbraun) 122.
- Schoeneberg, Bruno (Eisensteinsche Reihe und Theta-reihen) 54.
- Schomaker, Verner s. J. Waser 180.
- Schönberg, M. (Classical field formalism) 169; (Second quantization methods) 326; (Quantum mechanics. I.) 326.
- Scholz, Norbert (Druckverteilung der ebenen Platte) 453.
- Schouten, J. P. (Oscillations subharmoniques dans des circuits électriques) 156.
- Schrödinger, Erwin (Relativity and wave mechanics) 167.
- Schuh, H. (Unsteady boundary layers) 316.
- Schunck, Hermann (Physikalische Chemie) 320.
- Schuster, Kurt und Rudolf Meier (Dickenschwingungen von Kristallplatten) 481.
- Schützenberger, M. P. (Problème du codage binaire) 406.
- Schwartz, Laurent (Courant associé à une forme différentielle) 249.
- Schwarz, R. J. s. M. G. Salvadori 263.
- Schwarz, Stefan (Torsion semi-groups) 348; (Maximal ideals I, II.) 349.
- Scorza Dragoni, Giuseppe (Convergenza in lunghezza) 33.
- Scott, Elizabeth L. s. J. Neyman 189.
- Seaton, M. J. (Hartree-Fock equations) 325.
- Sebastião e Silva, J. (Funzionali analitici) 83.
- Seelbinder, B. M. (Two-stage sampling scheme) 105.
- Segre, Beniamino (Totalità delle varietà algebriche) 113; (Nodi delle superficie algebriche) 289.
- Seidel, W. s. F. Bagemihl 45, 238.
- Seifert, George (Certain solutions of a nonlinear differential equation) 245.
- Seki, Setsuya (Weakened type-logic) 343; (Metatheorem of SLK) 344.
- Sengupta, A. M. (Stress distribution in a beam) 308; (Radial and torsional vibrations of a annulus) 312.
- Senitzky, I. R. (Electron and quantized electromagnetic field) 476.
- Senkov, A. M. und P. F. Fil'čakov (Hydraulik offener Wasserströme) 319.
- Šeremet'ev, M. P. (Biegung dünner Platten) 447.
- Serghiesco, Stephan (Invariants différentiels) 34.
- Šerman, D. I. (Grundaufgabe der Elastizitätstheorie) 136.
- Serpente, Guido (Calcolo di certe somme) 204.
- Serre, Jean-Pierre (Problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein) 53.
- s. G. Hochschild 14.
- Serrin, James (Free boundary problems) 453.
- Sestini, Giorgio (Moti di un mezzo continuo disgregato) 438.
- Severi, Francesco (Applicabilità della formula di postulazione) 422.
- Severnyj, A. B. (Bewegungen in Sonnenprotuberanzen) 191.
- Shapiro, H. N. s. T. E. Harris 414.
- V. L. (Near-Vandermonde determinants) 8; (Double trigonometric series) 42; (Trigonometric series) 42.
- Shenton, L. R. (Class of definite integral. I, II.) 38.
- Shimoda, Isae (General analysis. II.) 401.
- Shimose, Tsuneto and Chohko Fujita (Theory of quantization for particle dynamics) 475.
- Shoenberg, D. (Superconductivity) 188.
- Shukla, U. (Non-summability of conjugate series of Fourier series) 371.
- K. (Points of non-symmetrical differentiability. II.) 227.
- Siegert, A. J. F. s. D. A. Darling 273.
- Sierpiński, W. (Formule de E. B. Escott) 39; (Théorème de recouvrement équivalent à un cas particulier de l'axiome du choix) 224.
- Sigalov, A. G. (Aufgaben der Variationsrechnung) 76.
- Signorini, A. (Culmannsche Ellipse) 132.
- Sikorski, R. s. H. Rasiowa 2.
- Šilov, G. E. (Homogeneous rings of functions) 84.
- Silva, J. Sebastião e s. Sebastião e Silva, J. 83.
- Dias, C. (Algebraische Topologie) 303.
- Simon, Herbert A. (Causal ordering) 280.
- Simultaneous linear equations. 91.
- Singer, Ivan (Théorèmes de moyenne pour les systèmes de fonctions) 368.
- K. (Stochastic processes) 408.
- Singh, Kuldeep (Eleven point conic) 288.
- S. K. (Zeros of polynomials) 206.
- Sirao, Tunekiti (Homogeneous differential processes) 98.
- Sitenko, A. s. A. Achiezer 470.
- Škitović, V. P. (Normalverteilung) 274.
- Škráček, Josef (M. Lerch) 340.
- Slater, J. C., H. Statz and G. F. Koster (Ferromagnetism) 186.
- N. B. (Gaseous unimolecular reactions) 178.
- Slezkin, N. A. (Helmholtz-scher Satz) 452.
- Šlionskij, G. (Summen beschränkter, schlichter Funktionen) 47.
- Slobodeckij, L. N. (Schlichte Funktionen) 241.
- Slomjanskij, G. A. (Bewegungsgleichungen eines Kreisels) 438.

- Sloovere, H. de (Variations successives d'une intégrale multiple) 394.
- Smirnov, A. A. (Kristallgitter eines Metalls) 481.
- M. M. (Gleichungen vom hyperbolisch-parabolischen Typus) 251.
- Smith, E. A. (Gravitational fields) 167.
- Walter L. (Central limit theorem) 96; (Queueing times) 100.
- — — s. D. R. Cox 268.
- Smoljakov, P. T. (Stationäre Bewegung in der Atmosphäre) 484.
- Šnajder, Zagorka s. Tatmir Angelitch 419.
- Sobczyk, Andrew s. P. C. Hammer 123.
- Sobociński, Bolesław (Modal system of Feys-von Wright) 6; (Universal decision element) 198.
- Sodhar, Mahendra Singh s. A. Nath Nigam 161.
- Sokolov, A. A., N. P. Klepikov und I. M. Ternov (Ausstrahlung schneller Elektronen) 465.
- — — und I. M. Ternov (Schnelle Elektronen im Magnetfeld) 170.
- Ju. D. (Bewegungen des Grundwassers) 150; (Zufluß von Grundwasser zur Drain-Galerie) 319.
- Sokolowsky, D. s. A. Hoffman 418.
- Solomon, Herbert (Random two-dimensional set) 101.
- Somers, Edward V. (Acoustic waves) 318.
- Somigliana, Carlo (Clima matematico) 484.
- Sondheimer, E. H. s. A. N. Gordon 91.
- Sonnefeld, A. (Ideale spiegelnde Kugelfläche) 469.
- Šoremčev, M. P. (Elastisches Gleichgewicht eines Ringes) 447.
- Sorokin, V. S. (Stabilität eines Gases im Schwerfeld) 336.
- Souriau, Jean-Marie (Géométrie symplectique différentielle) 296.
- Souza, Jayme Rios de s. Rios de Souza, Jayme 287.
- Soysal, Selma (Ensembles ordonnés de projecteurs. I, II.) 80.
- Spampinato, Nicolò (Punti fondamentali di trasformazione birazionale) 112; (Curve ellittiche) 112; (Ipersuperficie algebriche di indice n . IX—XI.) 291; (Theorema di Lüroth) 291, 421; (Varietà determinate da superficie algebrica) 291; (Varietà dell' S_5 determinate da coppia di curve algebriche) 291.
- Sparre Andersen, Erik (Two summation formulae) 7; (Sums of random variables) 97.
- Spencer, D. C. (Operators on manifolds) 65; (Heat conduction) 66.
- — — s. K. Kodaira 117.
- L. V. (Angular distributions from Legendre polynomial expansions) 327.
- Squire, Charles F. (Low temperature physics) 188.
- Srivastara, H. M. (K -function of Bateman) 237.
- Srivastava, B. N. and R. P. Rastogi (Thermodynamics of systems) 463.
- Stampacchi, Guido (Approssimazione di una funzione su una superficie) 232.
- Stange, Kurt (Gütegrad von Mischungen) 413.
- Stanković, Bogoljub (Équation intégrale homogène) 396.
- Statz, H. s. J. C. Slater 186.
- Steck, Max (A. Dürer) 196.
- Ștefănescu, Sabba S. (Champ magnétique des courants électriques stationnaires) 464.
- Stein, Marvin L. (Fixed end-point problems) 75.
- Steinberger, J. s. E. M. Henley 327.
- Steinhaus, H. (Statistical quality control) 104.
- — s. K. Kuratowski 121.
- Steinwedel, Helmut (Strahlungsdämpfung und Selbstbeschleunigung) 476.
- Stewart, A. L. s. D. R. Bates 329.
- C. A. (Advanced calculus) 224.
- Stewartson, K. (Incompressible fluid) 313.
- Stibbs, D. W. N. s. R. v. d. R. Woolley 190.
- Stipanić, Ernest (M. Getaldic) 340.
- Stoker, J. J. (Oscillations des systèmes non linéaires) 134.
- Stoll, W. (Jacobische Funktionen zu gegebenen Nullstellenflächen) 244.
- Stone, Marshall H. (Introduction to the theory of analytic functions) 237.
- Stoppelli, Francesco (Equazione differenziale della meccanica dei fili) 245.
- Storchi, Edoardo (Membrane) 139; (Plasticità piana) 139.
- Straškevič, A. M. (Traktorien relativistischer geladener Teilchen) 470.
- Stratton, R. (Surface free energy of metal. I, II.) 483.
- Straus, E. G. s. P. Erdős 80.
- Strother, Wayman L. (Fixed points) 125.
- Strubecker, Karl (Superficie) 296.
- Struik, D. J. (Analytic and projective geometry) 287.
- Stueckelberg, E. C. G. et A. Petermann (Normalisation des constantes) 476.
- — — et G. Wanders (Thermodynamique) 165.
- Su Buchin (Volumetric geometry) 431.
- — s. C. H. Ku 431.
- Subba Rao, K. s. Rao, K. Subba 39.
- Suda, Kazuo (Rotation problem of stellar configurations) 190.
- Sugawara, Masahiro (Rotation groups) 301.
- Sugiyama, Hiroshi (Control charts. I—III.) 104.
- Sundrum, R. M. (Wilcoxon's 2-sample test) 103.
- — — s. M. G. Kendall 103.
- Sunouchi, Gen-ichirō (Riemann summability) 37; (Corrections to "Riemann summability") 37; (Cesàro summability of Fourier series) 41; (Trigonometric series) 233; (Fourier analysis. XLVII.) 233.
- Šura-Bura, M. R. (Dirichlet'sches Problem für Laplace'sche Gleichung) 321.
- Sverdrup, Erling (Statistical test procedures) 102.
- Svešnikov, A. G. (Äußere Aufgaben der Theorie der elastischen Schwingungen) 140.
- Svirskij, I. K. (Näherungsmethoden zur Bestimmung der Frequenzen von Schwingungen) 403.
- Svoboda, František (Unbestimmte zweiwertige Boole'sche Funktion) 352.

- Swanson, C. A. s. T. E. Hull 371.
- Swansson, John s. R. Landauer 184.
- Sweet, P. A. and A. E. Roy (Rotating stars. I.) 190.
- Swenson, George W. (Modern acoustics) 451.
- Sydlar, J.-P. (Théorème de M. Pompeiu) 420.
- Sykes, J. B. (Limb-darkening) 189.
- Symonds, P. S. (Bending of beams) 140.
- Synge, J. L. (Viscous liquid) 144; (Relativistic two-body-problem) 169; (Electrical networks) 321.
- Sz.-Nagy, Gyula (Total-reelle Funktion) 206.
- Szaniawski, A. s. M. Lunc 461.
- Szarski, J. (Inégalités différentielles) 61.
- Szász, Paul (Hyperbolische Geometrie) 108; (Hyperbolische Trigonometrie) 109; (Rektifikation des Kreises) 109.
- Szele, Tibor (Abelian- p -groups) 13; (Einführung in die Algebra) 203.
- Taam, Choy-Tak** (Linear differential equations) 384.
- Tachibana, Syn-ichi (Imbedding problem of spaces) 429.
- Tafel zur Berechnung von Prozentsen. 278.
- Tagamlicki, Ja. (Vektoren, die bezüglich gewisser Kegel unzerlegbar sind) 399.
- Tagamitzki, Y. (Minkowskischer Stützebenensatz) 256.
- Takabayasi, Takehiko (Formulation of quantum mechanics) 324; (Separability of Dirac equation) 324.
- Takahashi, Shuichi (Compact groups) 211.
- Takano, Kinsaku (Class-convergence of distributions) 81; (Distribution functions) 82.
- Takasu, Tsurusaburo (Complex function theory on a "supracorpus". I.) 52; (General relativity as Laguerre geometry) 168; (Field theory as a non-holonomic parabolic Lie geometry) 168.
- Takayanagi, Kazuo and Tadamshi Kishimoto (Inelastic collision between molecules. III.) 179.
- Takeuchi, Kensuke (Free Boolean σ -algebra) 215.
- Takeuti, Gaisi (Logic calculus) 202; (Errata to "Generalized logic calculus") 203.
- Taksar, I. M. (Teilchen im Magnetfeld) 326.
- — — und Z. Ja. Plume (Impulsmagnetisierung) 482.
- Taldykin, A. T. (Existenz der Eigenwerte) 87.
- Tamari, Dov (Birkhoff-Witt rings) 215.
- Tammi, Olli (Extremal domains) 241.
- Tamura, Takayuki (Remarks on semi-groups) 348.
- Tanaka, Chuji (Dirichlet series. V.) 375.
- Shō and Hiroomi Umezawa (Transition matrix and Green function) 171.
- Tănăsescu, T. (Fonctionnement des circuits basculants symétriques) 266.
- Tanejura, N. A. s. V. E. Djachenko 265.
- Tanner, J. C. (Interference between two queues) 407.
- Tanzi Cattabianchi, Luigi (Teoremi di Mercer e Vijayaraghavan) 231.
- Tarabini, Vera (Fluttuazioni biologiche) 417.
- Tarski, Alfred, Andrzej Mostowski and Raphael M. Robinson (Undecidable theories) 4.
- Tasny-Tschiasny, L. (Roots of polynomial equations) 260.
- Tatuzawa, Tikao (Product of $L(1, \chi)$) 219.
- Taylor, Robert L. (Group extensions. I, II.) 13, 14.
- William J. (Burger's minimum function) 480.
- Tchakaloff (Čakalov), Ljubomir (Polare Singularitäten von Potenzreihen) 375.
- Teleman, C. (Groupes de mouvement des espaces de Riemann V_s) 116; (Espaces symétriques V_s) 116.
- S. (Fonctions du développement d'Almansi) 394.
- Temčenko, M. E. und A. A. Juščenko (Spannungen in einer bindenden Schicht) 313.
- Temperley, H. N. V. (Properties of matter) 304.
- Tempra, Giovanni (Matematica finanziaria) 278.
- Teodorescu, N. (Onde de choc) 450.
- Terleckij, Ja. P. s. A. A. Logunov 477.
- Ternov, I. M. s. A. A. Sokolov 170, 465.
- Terracini, Alessandro (G. Fano) 197; (Invarianti proiettivi) 295.
- Tevzadze, N. R. (Numerische Doppelreihen) 38.
- Thaler, G. J. and R. G. Brown (Servomechanism analysis) 265.
- Thathachari, Y. T. (X-ray focussing mirrors) 161.
- Thébault, Victor (Tétraèdres supplémentaires) 110.
- Theodorsen, Theodore (Propellers) 143.
- Thickstun, W. R. s. M. H. Martin 149.
- Thie, Joseph A. (Meson processes) 173.
- Thiruvengkatachar, V. R. and N. S. Venkatesan (Internal ballistics of leaking guns) 439.
- Thom, R. (Variétés différentiables cobordantes) 129; (Variétés cobordantes) 301; (Variétés-bords) 301.
- Thomas, T. Y. (Separation of supersonic flow from curved profiles) 149.
- Thomson, W. T. and T. A. Rogers (Analog solution for beams) 141.
- Tibiletti, Cesarina (Piani tripli e piani quadrupli) 424.
- Timan, A. F. (Interferenzenerscheinungen) 376.
- M. F. ($((C, \alpha, \beta)$ -Summabilität) 42.
- Titchmarsh, E. C. (Eigenfunction expansions. II—V.) 393.
- Țițeica, Șerban (Troisième principe de la thermodynamique) 152.
- Tjablikov, S. V. (Translations-invariant) 481.
- Toda, Hiroshi (Topology of standard path spaces. I.) 302.
- Togliatti, Eugenio G. (Superficie algebriche) 290.
- Tollmien, Walter (Windkanal-turbulenz) 317.
- Tomić, Miodrag (Théorème de L. Berwald) 346.
- Tominaga, Akira (Extensions of a metric) 124.
- Tomonaga, Sin-itiro s. Z. Maki 171.
- Yasuro (Betti numbers. I, II.) 115.
- Toscano, Letterio (Polinomi associati a polinomi classici) 236.
- Touchard, Jacques (Permutations) 204.
- Toulmin, G. H. (Uniform dimension) 125.

- Toumaniantz, S. s. M. Tropper 321.
- Touschek, B. s. M. Sands 162.
- F. s. G. Morpurgo 172.
- Toyozawa, Yutaka (Electronic polaron state) 183.
- Teturo Inui and Yasutada Uemura (Interaction of additive electrons. II.) 183.
- Tranque, Tomás García s.
- García Tranque, Tomás 131.
- Travers, Serge (Résistance de l'air) 150.
- Treacy, P. B. (Multipole radiation) 329.
- Tricomi, Francesco Giacomo (Equazioni differenziali) 380.
- Trier, A. A. Th. M. van (Guided electromagnetic waves) 158.
- Trlifaj, Miroslav (Polarizability) 184.
- Troickij V. A. (Dynamische Systeme und automatische Regelsysteme) 249.
- Tropper, M. (Circuits électriques) 321.
- Trost, Ernst (Primzahlen) 360.
- Trueblood, K. N. s. S. W. Mayer 265.
- Trumpler, D. A. s. T. E. Hull 371.
- Robert J. and Harold F. Weaver (Statistical astronomy) 484.
- Tsuchikura, Tamotsu (Theorem of Erdős) 40; (Sommes riemanniennes) 235.
- Tsuji, Masatsugu (Meromorphic functions) 46; (Ahlfors' theorems) 51; (Dirichlet- and Neumann-problem) 252; (Integral equation) 254.
- Tugue, Tosiya s. Motokiti Kondô 30.
- Tulcea, Ionescu C. T. s. Ionescu Tulcea, C. T. 258.
- Turri, Tullio (Funzioni algebriche generali di due variabili) 291.
- Turrin, A. s. E. R. Caianiello 163.
- Tustin, Arnold (Mechanism of economic systems) 417.
- Tveritin, A. N. (Longitudinaler Stoß gegen einen Stab) 313.
- Uemura, Yasutada s. Y. Toyozawa 183.
- Uhlenbeck, George E. s. F. Harary 131.
- Umezawa, Hiroomi s. Susumu Kamefuchi 327.
- s. Sho Tanaka 171.
- Unsöld, Albrecht (vorgelegt von) (Unbekannter Brief von C. F. Gauss an H. C. Schumacher) 197.
- Uppsala Symposium on Psychological Factor Analysis. 102.
- Ura, Taro (Courbes définies par les équations différentielles) 247.
- Urban, P. s. E. Ledinegg 312, 331.
- Utumi, Yuzo (Primal elements) 214; (Primary elements of a modular lattice) 214.
- Vacca, Maria Teresa (Moto di rotolamento di una sfera) 133.
- Vachnin, V. M. (Eigenfunktionen realer Resonatoren) 158.
- Vagner, V. V. (Verallgemeinerte „Scharen“) 206.
- Vajnberg, M. M. (Struktur eines Operators) 87.
- Válcovici, V. (Tiges pesantes) 310; (Lignes de courant et lignes de tourbillon) 455.
- Valenta, Luboš (Extension of ferromagnetism) 187.
- Valle Flores, Enrique (Bemerkung zu einem Satz von D. Ellis) 212; (Metrik von Busemann) 431.
- Vand, V. and R. Pepinsky (X-ray structure analysis) 180.
- s. M. M. Qurashi 333.
- Vaněk, Jiří (Elastic waves produced by shock) 313.
- Vaona, Guido (Trasformazioni puntuali) 429.
- Varnum, Edward C. (Polynomial determination) 205.
- Varshni, Yatendra Pal s. A. Nath Nigam 161.
- Varvak, P. M. (Räumliches Problem der Elastizitätstheorie) 309.
- Vašíček, Antonín (Achromatisierung of thin films) 160.
- Vasilache, S. (Équation des télégraphistes) 395; (Fluide incompressible dans un cylindre poreux) 461.
- Vause, R. Z. (Distribution of Jacobian symbols) 358.
- Vekua, I. N. (Randwertaufgabe mit schiefer Ableitung) 70; (Cauchy-Riemannsche Gleichungen) 378.
- Velte, Waldemar (Variationsrechnung mehrfacher Integrale) 76.
- Veltkamp, G. W. (Nichtlineare partielle Differentialgleichungen) 388.
- Venkatesan, N. S. s. V. R. Thiruvengatathar 439.
- Verhoeff, J. (Radical of a ring) 215.
- Vernic, Radovan (Dreikörperproblem) 438.
- Vernotte, P. (Régularité et séries divergentes) 229.
- Verschaffelt, J. E. (Électromagnétisme dans la thermomécanique) 151.
- Vesentini, Edoardo (Curve polari) 424; (Molteplicità effettive delle curve polari) 424.
- Vidal Abascal, E. (Bahnbestimmung der Doppelsterne) 188.
- Vietoris, L. (Richtungsfehler einer Näherungslösung von $y' = f(x, y)$) 91; (Richtungsfehler einer Näherungslösung von $y_k = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$) 91.
- Villa, Mario (Transformations ponctuelles) 295; (Cubica collegata ad un punto unito) 295.
- Villegas Mañé, Cesáreo (Hydraulic machines) 319.
- Vincensini, Paul (Ensembles d'arcs de cercle) 121; (Équations aux dérivées partielles) 294.
- Vinograd, R. É. (Differentialgleichungen) 63; (Exponenten regulärer Systeme) 63; (Charakteristische Zahlen regulärer Systeme) 248.
- Vinogradov, I. M. (Satz aus der Theorie der Primzahlen) 27.
- Vinokurov, S. G. (Temperaturspannungen in Platten) 447.
- Visconti, Antoine (Équations du type de diffusion) 170.
- Višik, M. I. (Erste Randwertaufgabe für elliptische Gleichungen) 71; (Randwertaufgaben für elliptische Gleichungen) 72.
- Vitner, Čestmír (Semimodular conditions) 351.
- Voelker, Dietrich (Laplace-Integral) 78.
- Vogel, Kurt (J. Tropfke) 340.
- Théodore (Topologie des oscillations) 157; (Systèmes dynamiques) 249; (Distorsion des fonctions) 454.
- Volk, V. Ja. (Umkehrformeln für Differentialgleichung) 245.
- Vol'kenštejn, M. V. and É. K. Bjutner (Dichroismus in Kristallen) 482.
- Volpato, Mario (Elementi uniti di trasformazioni funzionali) 389.

- Voroncov, G. V. (Stabilität elastischer Systeme) 312.
- Vowels, R. E. (Statistical methods to servomechanisms) 404.
- Vrānceanu, G. (Équation arithmétique) 358; (Connexion linéaire de l'espace A_2) 431.
- Vredenduin, P. G. J. (Orthozentrische Vierflach) 110; (Negationless mathematics) 202.
- Vučković, Vladeta (Condition de convergence dans les théorèmes de nature taubérienne) 395; (Stieltjes-Transformation) 396.
- — s. Ranko Bojanić 448.
- Vulich, B. Z. (Halbgeordnete Mengen) 79; (Halbgeordnete Ringe) 80.
- Vvedenskaja, N. D. (Randwertaufgabe für Gleichungen vom elliptischen Typus) 70.
- Vyčichlo, F. (J. Vojtěch) 340.
- W**agner, Karl Willy (Elektromagnetische Wellen) 157.
- Walfisz (Val'fiš), A. Z. (Primzahltheorie) 220.
- Wallace, A. D. (Cohomology, dimension and mobs) 433.
- Walmsley, C. (Gibbs phenomena) 41.
- Walsh, J. L. (Derivatives of sequences of functions) 228.
- Walther, A. und K.-J. Lese-mann (Differentialgleichung einer Funkenstrecke) 479.
- Alwin (Angewandte Mathematik. I.) 88; (II.) 131.
- Wan, Chen-Hsian s. Loo-keng Hua 212.
- Wanders, G. s. E. C. Stueckelberg 165.
- Wang, Chi-Teh (Applied elasticity) 439.
- Waser, Jürg und Verner Schomaker (Fourier inversion) 180.
- Washburn, Seth H. s. William Keister 403.
- Wasow, Wolfgang (Perturbation singularities) 134; (Disturbances of plane Couette flow) 456.
- Watanabe, Nobuo s. T. Kitagawa 105.
- Watanabé, Tokunosuké s. Masao Atoji 332.
- Watson, Kenneth M. s. N. C. Francis 177.
- W. H. (Fourier transforms in physical problems) 132.
- Wazewski, T. (La mise en équation du problème physique) 142; (Nombre des paramètres) 247.
- Weber, Heinrich s. Bernhard Riemann 194.
- Webster, Harold (Maximum test validity) 276.
- Weg, H. van de (Quantizing noise of a modulation system) 273.
- Wegner, Udo (Risoluzione numerica dei sistemi di equazioni lineari) 261.
- Weil, André (Points porches) 249.
- Weinstein, Alexander (Computation of eigenvalues) 91; (Method of singularities) 145; (Potential theory) 253.
- Weiss, Lionel (Testing hypothesis) 275.
- Wentzel G. (Three-nucleon interactions) 176.
- Werle, J. ("Equivalent" potentials) 163; (Quantum calculations) 176.
- Wermer, John (Ideals in commutative Banach algebras) 84.
- Weston, D. E. (Propagation of sound waves) 318.
- Wexler, Charles s. L. J. Paige 108.
- Weyl, Hermann (Überschneidungszahl) 434.
- Wherry, Robert J. and Ben J. Winer (Factoring large numbers of items) 276.
- Whitehead, George W. (Homotopy theory) 434.
- Whiteman, Albert Leon (Finite Fourier series) 27.
- Whittle, P. (Multiple stationary time series) 410; (Stationary time series) 410.
- Whyburn, G. T. (Space for mappings) 123.
- Wiegmann, N. s. A. Hoffman 418.
- Wijngaarden, A. van (Ut tensio sic vis) 136; (Asymptotic expansion) 235.
- Will, Herbert (Approximation regulärer Funktionen) 242.
- Williams, E. J. (Double classifications) 414.
- — — and N. H. Kloot 415.
- W. L. (Pentagon theorem) 112.
- Wilson, A. H. (Diamagnetism) 481.
- Winer, Ben J. s. Robert J. Wherry 276.
- Winter, H. J. J. (Formative influences in islāmic science) 338.
- Wintner, Aurel s. Philip Hartman 293.
- Wirtinger, W. s. Bernard Riemann 194.
- Włodarski, L. (Formule de Efros) 78.
- Wold, Herman (Étude du risque) 282.
- Wolfe, James s. E. Chamberlin 9.
- Wolff, Peter A. (Plasma waves) 185.
- Wolfowitz, J. s. A. Dvoretzky 279.
- Wondratschek, Hans (Tensor-symmetrien) 332.
- Woodbury, Max A. (Linear-convex games) 410.
- Woolley, R. v. d. R. and D. W. N. Stibbs (Outer layers of a star) 190.
- Wotruba, Karel (Elastische Platte) 137.
- Wróbel (Vrubel'), T. H. (Gleichungen von Golab) 427.
- Wyler, Oswald (Order in projective and descriptive geometry) 107; (Incidence geometry) 107.
- X**iroudakis, G. P.
($x^4 + m x^2 y^2 + n y^4 = z^2$) 24.
- Y**amabe, Hidehiko (Conjecture of Iwasawa and Gleason) 16; (Theorem of Gleason) 16.
- Yamamoto, Takao (General spin) 169.
- Yen, K. T. s. G. F. Carrier 149.
- Yntema, L. (Graduation of net fertility tables) 277.
- Yoneda, Keizo (Integration theory) 52.
- Yoshihiro, Takashi (Fourier integral) 255.
- Yosida, Kōsaku (Correction to "Titchmarsh-Kodaira's formula") 387.
- Tokunosuke s. Shigeo Ozaki 240.
- Young, D. M. s. G. Birkhoff 264.
- — — s. M. L. Juncosa 463.
- Yuting, Shen (Paradox) 29.
- Z**aanen, A. C. (Linear analysis) 256.
- Zacharias, Max (Hessesche Konfiguration) 287.
- Zacher, Giovanni (Gruppi finiti) 209; (Emimorfismi superiori ed inferiori tra reticoli) 213.
- Zachrisson, L. E. (Équations aux variations) 58.

- Zadeh, L. A. (Stochastic operators) 271; (Filtering) 406.
- Zanobetti, Dino („Skin effect“) 157; (Impedenza dei conduttori cilindrici) 158.
- — e Gianoberto Santi (Criterio di stabilità) 58.
- Zappa, Guido (Piani grafici finiti transitivi) 286; (Reticolo dei sottogruppi di un gruppo finito) 350.
- Zarankiewicz, K. (Graphs of P. Turán) 131.
- Zarantonello, E. H. s. G. Birkhoff 264.
- Zavalo, S. T. (T -freie Gruppen) 11.
- Zehler, V. (Energiebänder im Diamantkristall) 183.
- — s. W. Döring 183.
- Zeller, K. s. W. Meyer-König 35.
- Karl (Einfolgenverfahren) 36; (FK -Räume. II.) 44; (FK -Räume und Matrixtransformationen) 230.
- Zeuli, Tino (Problema di Cauchy per la propagazione di onde) 158; (Movimento di fluidi veloci) 165.
- Zin, Giovanni (Cavi coassiali irregolari) 159.
- Zmorovič, V. A. (In einem Kreisring schlichte Funktionen) 48; (Strukturformeln analytischer Funktionen) 48.
- Zubieta, R. F. (Theorie der Klassen) 222.
- Zubov, V. I. (Stabilität eines Systems von Differentialgleichungen) 62.
- — P. (Berechnung der Jahre) 196; (Einteilung der Stunde) 196.

